С. В. Солодуша (Иркутск, ИСЭМ СО РАН). **Об оценках решений некоторых нелинейных интегральных неравенств.**

В теории математического моделирования нелинейных динамических систем вход–выход хорошо известен подход, основанный на построении полиномов Вольтерра N-й степени:

$$y(t) = \sum_{m=1}^{N} \int_0^t \cdots \int_0^t K_m(t, s_1, s_2, \ldots, s_m) \prod_{i=1}^{m} x(s_i)\, ds_i, \qquad t \in [0, T]. \tag{1}$$

В (1) $x(t)$ и $y(t)$ — скалярные функции времени, причем $y(0) = 0$, $y'(t) \in C_{[0,T]}$. Предположим, что переходные характеристики K_m, $m = 1, 2, \ldots, N$, уже идентифицированы каким-либо способом, например, по методике [1, 2]. Ставится задача определения входного возмущения $x(t)$, соответствующего заданному (желаемому) $y(t)$. Такая постановка возникает в связи с задачами автоматического управления техническими объектами.

Общеизвестна роль неравенства Гронуолла–Беллмана при исследовании устойчивости решения линейного интегрального уравнения Вольтерра I-го рода (1) (при $N = 1$). В [3] разработана техника получения неулучшаемых оценок решений нелинейных интегральных неравенств, играющих принципиальную роль при исследовании устойчивости решений интегральных уравнений вида (1) (при $N > 1$).

На практике обычно $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_p(t))$ есть вектор-функция времени. Пусть для определенности $x_i(t)$, $i = 2, 3, \ldots, p$, считаются заданными, причем допустимые входные возмущения $x_i(t) \in X_i = \{\lambda_i e(t),\ \lambda_i \in R,\ t \in [0, T]\}$, $i = 2, 3, \ldots, p$, где $e(t)$ — функция Хевисайда.

Рассмотрим случай постоянных ядер $K_i = k_i$, $k_1 > 0$, $K_{ji} = k_{ji}$, $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant p$. Не уменьшая общности, зададим $k_1 = 1$. Теперь вместо (1) при $N = 2$ имеем

$$\begin{aligned} \left(1 + \sum_{i=2}^{p} k_{1i}\lambda_i t\right) \int_0^t x_1(s)\, ds + k_{11}\left(\int_0^t x_1(s)\, ds\right)^2 \\ = y(t) - \sum_{i=2}^{p} k_i \lambda_i t - \sum_{i=2}^{p}\sum_{j=2}^{i} k_{ji}\lambda_j\lambda_i t^2, \end{aligned} \tag{2}$$

где $t \in [0, T]$. Управляющее воздействие $x_1(t)$ является решением полиномиального интегрального уравнения (2). Следуя [3], дифференцируем (2) и переходим к оценке по модулю

$$(1 - I_1 t)|x_1(t)| \leqslant \widetilde{F} + 2I_2 t + (2M_{11}|x_1(t)| + I_1) \int_0^t |x_1(s)|\, ds, \tag{3}$$

где $M_i = |k_i| > 0$, $L_i = |\lambda_i| > 0$, $M_{ji} = |k_{ji}| > 0$, $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant p$, $\widetilde{F} = F + \sum_{i=2}^{p} M_i L_i$, $I_1 = \sum_{i=2}^{p} M_{1i} L_i$, $I_2 = \sum_{i=2}^{p}\sum_{j=2}^{i} M_{ji} L_j L_i$, $F = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} |y'(t)| > 0$, так что $|y(t)| \leqslant Ft$.

Примем следующие обозначения:

$$\gamma = \sqrt{M_{11}\widetilde{F}(I_1 + M_{11}\widetilde{F}) + M_{11} I_2}, \quad \chi(t) = \sqrt{(1 - I_1 t)^2 - 4M_{11} t(\widetilde{F} + I_2 t)}. \tag{4}$$

Теорема. *В рассматриваемом случае непрерывное решение* $x_1^*(t)$ *уравнения* (2) *заведомо существует на* $[0, T]$, $T < T^*$,

$$T^* = \frac{I_1 + 2M_{11}\widetilde{F} - 2\gamma}{I_1^2 - 4M_{11} I_2}, \tag{5}$$

причем справедливо неравенство

$$|x_1^*(t)| \leqslant \psi^*(t), \qquad t \in [0, T^*), \tag{6}$$

где

$$\psi^*(t) = \frac{\widetilde{F}}{\chi(t)} + \frac{I_1 - (I_1^2 - 4M_{11}I_2)t}{2M_{11}\chi(t)} - \frac{I_1}{2M_{11}}. \tag{7}$$

З а м е ч а н и е. Формулы (4)–(7), по существу, дают неулучшаемую оценку непрерывных решений нелинейного интегрального неравенства (3).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09-01-00377.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Апарцин А. С.* Неклассические уравнения Вольтерра первого рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999, 193 с.
2. *Апарцин А. С.*, *Солодуша С. В.* Об оптимизации амплитуд тестовых сигналов при идентификации ядер Вольтерра. — Автомат. телемех., 2004, № 3, с. 116–124.
3. *Апарцин А. С.* Полилинейные интегральные уравнения Вольтерра первого рода: элементы теории и численные методы. — Изв. Иркутского Гос. ун-та, сер. матем., т. 1, № 1, с. 13–42.