Т. А. Ш о р н и к о в а, **М. В. К у з н е ц о в а**, **Н. В. К и с т о в а** (Пенза, ПГТА)**. Расчет общего ожидаемого дохода.**

Характер явлений, с которыми встречаются при исследовании социальных и экономических процессов и управлении ими, требует применения стохастических моделей. Для этих явлений типичны случайные отклонения и взаимосвязь во времени. Применение стохастических моделей при исследовании экономических процессов заключается как в заимствовании моделей, оправдавших себя в других областях, так и в разработке специальных моделей, когда ставится цель оценить рассматриваемые явления и изучить особенности оценивающих функций в различных ситуациях. Покажем реальные возможности применения стохастических моделей при изучении экономических явлений, в которых сам характер этих явлений требует стохастического подхода.

Вероятности перехода p_{ij} из состояния i в состояние j можно приписать некоторую оценку r_{ij}.

Покажем здесь, как можно определить общий ожидаемый доход, если переходы осуществляются в непрерывно изменяющемся времени. В этом случае процесс определен матрицей A интенсивностей вероятностей переходов и исходным распределением вероятности. Припишем интенсивностям вероятностей перехода a_{ij} для $i \neq j$ оценку r_{ij}. Тем самым выразим тот факт, что при переходе от состояния i к состоянию j будет выплачено r_{ij} денежных единиц.

Определим ожидаемый доход в момент $t + \Delta t$, когда Δt стремится к нулю:

$$v_i(t+\Delta t) = \Big(1 - \sum_j a_{ij}\Delta t[r_{ii}\Delta t + v_i(t)] + \sum_{j\neq i} a_{ij}\Delta t[r_{ij} + v_j(t)]\Big). \tag{1}$$

Если учесть, что $\sum_{j\neq i} a_{ij} = a_{ii}$, и если пренебречь величинами $(\Delta t)^2$, то после простых преобразований получим $\lim_{n\to\infty}[(v_i(t+\Delta t) - v_i(t))/\Delta t] = dv_i(t)/dt = r_{ii} + \sum_{i\neq j} a_{ij}r_{ij} + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}v_i(t)$.

Если обозначить $q_i = r_{ii} + \sum_{i\neq j} a_{ij}r_{ij}$ (q_i — мгновенный доход), то с помощью матричной алгебры можно записать $d\mathbf{v}(t)/dt = \mathbf{q} + A\mathbf{v}(t)$. Так же можно определить и производящую функцию

$$f(s,\mathbf{v}) = s^{-1}(sI - A)^{-1}\mathbf{q} + (sI - A)^{-1}\mathbf{v}(0). \tag{2}$$

Предположим, что $\mathbf{v}(0) = 0$.

При изучении непрерывных процессов для соответствующего преобразования Лапласа ранее нашли, что

$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{s+4}{s(s+9)} & \dfrac{5}{s(s+9)} \\ \dfrac{4}{s(s+9)} & \dfrac{s+5}{s(s+9)} \end{pmatrix}.$$

Для преобразования всего ожидаемого дохода получим $f(s,\mathbf{v}) = s^{-1}(sI - A)^{-1}\mathbf{q}$. С помощью обратного преобразования Лапласа получим

$$\mathbf{v}(t) = \left\{ t\begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/81 & -5/81 \\ -4/81 & 4/81 \end{pmatrix} + e^{-9t}\begin{pmatrix} -5/81 & 5/81 \\ 4/81 & -4/81 \end{pmatrix} \right\} q.$$

Если процесс протекает в течение достаточно длительного времени, то третий член стремится к нулю, и поэтому будем иметь $\mathbf{v}(t) = t(1,1)' + (5/9, -4/9)'$ (' — транспонирование).

Получен тип уравнений, аналогичный случаю процесса с дискретным временем. Для процесса с непрерывным временем также осуществим прямой анализ выражения производящей функции. Можно снова записать $(sI - A)^{-1} = s^{-1}S + F_s(T)$, где S —

стационарная часть, а $F_s(T)$ — та часть производящей функции, которая соответствует переходному процессу. Если подставить данную формулу в (2), то получим $f(s,\mathbf{v}) = s^{-2}S\mathbf{q} + s^{-1}F_s(T)\mathbf{q} + s^{-1}S\mathbf{v}(0) + F_s(T)\mathbf{v}(0)$.

Первый член представляет собой преобразование функции $tS\mathbf{q}$. Второй член включает постоянную часть $F_0(T)\mathbf{q}$ и элементы, исчезающие при росте t. Третий член соответствует постоянной части $S\mathbf{v}(0)$ и, наконец, последний член включает опять элементы, стремящиеся к нулю с ростом t (члены с $\mathbf{v}(0)$ будут нулевые). Для достаточно больших t будем иметь $\mathbf{v}(t) = tS\mathbf{q} + F_0(T)\mathbf{q} + S\mathbf{v}(0) = tg + \mathbf{v}$, где $g = S\mathbf{q}$, $\mathbf{v} = F_0(T)\mathbf{q} + S\mathbf{v}(0)$. Если речь идет о регулярном процессе, то $g_i = g$. Для величин v_i, g получим систему $N+1$ уравнений с N неизвестными.

Так же, как в случае дискретного процесса, введем некоторый коэффициент α, с помощью которого оценка процесса приводится к концу бесконечно малого интервала dt. Единичная денежная сумма, которую можно было бы использовать к концу интервала, имеет в его начале «оценку» $1 - \alpha\, dt$. В таком случае коэффициент α является нормой процента при непрерывном процентировании. Можно его интерпретировать и иначе: вероятность окончания процесса по прошествии периода dt равна $\alpha\, dt$.

Эту модификацию отразим в (1) в результате применения формулы $(1-\alpha\, dt)$. Тогда соотношение между общими ожидаемыми последовательными доходами составит $v_i(t+dt) = (1-\alpha\, dt)\{(1-\sum_{i\neq j} a_{ij}\, dt[r_{ii}\, dt + v_i(t)] + \sum_{j\neq i} a_{ij}\, dt[r_{ij}\, dt + v_j(t)]\}$.

Осуществим преобразование, примененное для выражения (1). После нескольких шагов получим $v_i(t+dt) - v_i(t) + \alpha\, dt v_i(t) = q_i\, dt + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\, dt\, v_j(t)$.

Осуществив переход к пределу при $dt \to 0$, будем иметь $dv_i(t)/dt + \alpha v_i(t) = q_i + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\, dt\, v_j(t)$, или в матричной форме $d\mathbf{v}(t)/dt + \alpha\mathbf{v}(t) = q + A\mathbf{v}(t)$. Если применить к этой формуле преобразование Лапласа, то получим $sf(s,\mathbf{v}) - \mathbf{v}(0) + \alpha f(s,\mathbf{v}) = s^{-1}\mathbf{q} + Af(s,\mathbf{v})$, откуда $f(s,\mathbf{v}) = s^{-1}[(s+\alpha)I - A]^{-1}\mathbf{q} + [(s+\alpha)I - A]^{-1}\mathbf{v}(0)$.

Здесь снова обнаруживается аналогия с дискретным процессом, заключающаяся в том, что для предельных значений общих ожидаемых доходов при изменяющихся оценках получим систему N уравнений с N неизвестными.

Если сравнить непрерывный и дискретный процесс с изменяющейся оценкой, то получим инструмент для изучения обоих случаев в форме $v_i = q_i + \beta\sum_{j=1}^{N} p_{ij}v_j$, или $\alpha v_i = \widetilde{q}_i + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}v_j$.

Если учесть, что $a_{ij} = p_{ij} - \delta_{ij}$ ($\delta_{ij} = 1$, $\delta_{ij} = 0$), то получим $(1+\alpha)v_i = \widetilde{q}_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}v_j$, или в форме

$$v_i = \frac{1}{1+\alpha}\widetilde{q}_i + \frac{1}{1+\alpha}\sum_{j=1}^{N} p_{ij}v_j.$$

Таким образом, можно достичь такого соответствия между процессами, что для решения соответствующих уравнений не нужно будет использовать две программы. Это относится и к другим случаям, в которых изучаются различные альтернативные возможности в процессах подобного рода.