Р. С. Я к у ш е в (Казань, К(П)ФУ)**. Исследование нелинейных колебаний пневматических шин.**

В работе, представленной данным докладом, являющейся продолжением исследований [4], рассматривается динамическое поведение пневматической шины — сложной пространственной конструкции, состоящей из нескольких областей, материалы которых обладают разными механическими свойствами [5]. Трудности построения математической модели современной шины зависят от многих факторов: от физико-химических свойств используемых материалов, от конструктивных особенностей шин.

В упрощенной постановке задачи шина рассматривалась как упругое кольцо, или в более сложной модели — как многослойная оболочка из разных материалов. Сложность задачи определяет применяемые методы расчета, в основном численные: методы конечных элементов, локальных вариаций и конечных разностей.

Мы исходим из постановки пространственной задачи теории упругости. Математическая формулировка задачи определения напряженно-деформированного состояния шины включает нелинейные уравнения. Определяющие соотношение материала пневматической шины будем рассматривать в операторном представлении [3]. При учете деструкции оно имеет вид $\sigma_{ij} = \widehat{F}_{ij}(\widetilde{\varepsilon}, \widetilde{\chi}, T, \mathbf{x})$, т. е. в каждый момент времени t шесть независимых компонент симметричного тензора напряжений $\widetilde{\sigma}$ определяются шестью компонентами симметричного тензора деформаций $\widetilde{\varepsilon}$ не только в момент времени t, но и во все моменты τ $(0 \leqslant \tau \leqslant t)$, предшествующие этому времени. Это означает, что тензор напряжений определяется историей деформации. Радиус-вектор $\mathbf{x}$ подчеркивает явную зависимость оператора от координат материальных точек (т.е. материал неоднородный и материальные функции могут быть разрывными). Для учета «деструкций», накапливаемых в процессе эксплуатации шины и возникающих от действия внешней среды, используется постулируемый А. А. Ильюшиным [1] макрообъект «повреждение» $\widetilde{\chi}$. Этот объект является оператором процесса нагружения $\chi_{ij} = \widehat{\Phi}_{ij}(\widetilde{\sigma}, T, \mathbf{x})$, откуда, используя вместо тензора напряжений тензор деформаций, получаем $\chi_{ij} = \widehat{\chi}_{ij}(\widetilde{\varepsilon}, T, \mathbf{x})$. Предположим также, что определяющие соотношения должны разрешатся относительно деформаций: $\varepsilon_{ij} = \widehat{K}_{ij}(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\chi}, T, \mathbf{x})$. Здесь $\widehat{K}_{ij}$ — взаимно обратный оператор к $\check{F}_{ij}$. Учет изменения структуры вещества важен при моделировании процессов деформирования. Существуют различные способы для феноменологического описания этого изменения [2]. Для «полярной среды» или среды Коссера, кроме обычных напряжений Пиолы, вводятся моментные напряжения μ^{ij}. Кинематика такой среды обогащается введением вектора поворота $\boldsymbol{\omega} = \omega^i e_i$, спин-вектора $\mathbf{M} = d\boldsymbol{\omega}/dt$, градиента вектора поворота (тензора изгиба-кручения) κ_{ij}.

Из постулатов об изменении количества движения и об изменении кинетического момента следуют уравнения движения сплошной среды:

$$\rho \frac{d^2 u^j}{dt^2} = \rho f^j + \nabla_i p^{ij}, \quad J \frac{d^2 \omega^j}{dt^2} = J M^j + \nabla_i \mu^{ij} + \frac{\varepsilon^{jkl} p_{kl}}{\sqrt{g}}.$$

Из законов термодинамики следует уравнение притока тепла — седьмое уравнение системы разрешающих уравнений:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \rho q + w^* + \Lambda^{ij} T_j \nabla_i (\Lambda^{ij} T_{,j} \nabla_j T) - T \frac{d}{dt} [\alpha_{ij} p^{ij}(f) + \beta_{ij} \mu^{ij}(f)].$$

Формулировка задачи включает начальные условия при $t = t_0$:

$$T = T^0, \quad u^j = U_0^j, \quad \frac{du^j}{dt} = V_0^j, \quad \omega^j = \Omega_0^j, \quad \varphi^j = \Phi_0^j,$$

и граничные условия на поверхности $\sum = \sum_1 \cup \sum_2$:

$$u^j|_{\Sigma_1} = u_0^j, \quad p^{ij}|_{\Sigma_2} = s_0^j, \quad \omega^j|_{\Sigma_1} = \omega_0^j, \quad \mu^{ij}|_{\Sigma_2} = S_0^j, \quad \Lambda^{ij} \nabla_j T n_i|_{\Sigma} = \eta(T|_{\Sigma} - T_c^0).$$

Задача сводится к решению семи дифференциальных уравнений относительно семи входящих величин, удовлетворяющих начальным и граничным условиям. Материальные функции определяющих соотношений и величины являются разрывными функциями координат, так что речь может идти только об обобщенном решении поставленной задачи.

Чтобы найти решение, используем метод осреднения [3], для чего введен малый геометрический параметр α и наряду с лагранжевыми координатами ς^i, которые называются *медленными*, введены «быстрые» координаты ξ^i. Это позволяет свести исходную задачу к двум рекуррентным последовательностям задач. В первой из них решаются задачи для однородной среды с приведенными (эффективными) характеристиками. А во второй рекуррентной последовательности решаются задачи для неоднородной среды в области, представляющей собой элемент структуры композита. Отметим, что только нулевые задачи каждой из последовательностей являются нелинейными, а все остальные задачи последовательностей — линейные. После удовлетворения условий сопряженности при переходе от одного элемента к другому получаются эффективные характеристики для материала шины.

Заключение: в отличие от теории эффективного модуля, теорией нулевого приближения можно описать разрывы в тангенциальных напряжениях и тепловых потоках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А. А.*, *Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970, 280 с.
2. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980, 512 с.
3. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: МГУ, 1984, 336 с.
4. *Победря Б. Е.*, *Якушев Р. С.* О структурной механике резинокордных композитов. — Математическое моделирование систем и процессов, 2004, № 12, с. 70–74.
5. *Якушев Р. С.* Особенности математического моделирования и расчета пневматической шины. — В сб.: Труды 13-й межвузовской конференции. Ч. 1. Самара: Изд-во СамГТУ, 2003, с. 217–219.