В. Б. Г и с и н (Москва, Финансовый ун-т). **Выпуклые нечеткие подгруппы аддитивной группы вещественных чисел.**

Пусть A — аддитивная группа. В соответствии с принципом обобщения Заде нечеткое подмножество H группы A с функцией принадлежности $\mu_H : A \to I$, $I = [0,1]$, *называется нечеткой* подгруппой, если выполняются следующие условия: (i) $\mu_H(0) = 1$; (ii) $\mu_H(x+y) \geqslant \min\{\mu_H(x), \mu_H(y)\}$ для любых $x, y \in A$; (iii) $\mu_H(-x) = \mu_H(x)$ для любого $x \in A$ (см. [1]). Если нечеткость имеет вероятностную природу, операция min в этом определении может быть заменена произвольной T-нормой $*$ (бинарной операцией, превращающей I в упорядоченную полугруппу с нулем и единицей). В этом случае условие (ii) приобретает следующий вид: (ii*) $\mu_H(x+y) \geqslant \mu_H(x) * \mu_H(y)$. Нечеткая подгруппа аддитивной группы вещественных чисел $\mathbf{R}$ называется *выпуклой*, если $\mu_H(y) \leqslant \mu_H(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant y$.

Нечеткая подгруппа H порождает на $\mathbf{R}$ нечеткое отношение эквивалентности E с функцией принадлежности $\mu_E(x,y) = \mu_H(x-y)$, являющееся конгруэнцией (т. е. такое, что $\mu_E(x,y) * *\mu_E(x',y') \leqslant \mu_E(x+x', y+y')$). Обратно, нечеткая конгруэнция E определяет нечеткую подгруппу с функцией принадлежности $\mu(x) = \mu_E(x,0)$. Смежные классы вещественных чисел по нечеткой подгруппе H — это нечеткие числа с функциями принадлежности вида $\mu_H(x-a)$, $a \in \mathbf{R}$. Нетрудно заметить, что в полугруппе нечетких чисел с sup-$*$-сложением нечеткие подгруппы являются идемпотентными элементами [2], [3]. Положительные сдвиги нечеткой выпуклой подгруппы аддитивной группы вещественных чисел порождают положительный конус относительно нечеткого упорядочения. Обратно, всякая нечеткая подгруппа является пересечением положительного и отрицательного конуса в некотором нечетком упорядочении [4].

Пусть на некотором множестве Ω задана вещественная функция (измерение) f. Элементы $u, v \in \Omega$ считаются *неразличимыми* (будем писать $u \approx v$), если $|f(u) - f(v)| < \xi$, где ξ — случайная величина, принимающая положительные значения. Будем считать, что случайные величины ξ непрерывны и имеют одинаковые распределения для всех пар $u, v \in \Omega$. Обозначим $F(x)$ функцию распределения. Говорят, что отношение $\approx$ *слабо транзитивно*, если $\mathbf{P}\{u \approx v, v \approx w\} \leqslant \mathbf{P}\{u \approx w\}$ для любых $u, v, w \in \Omega$.

Пусть C — такая копула, что $C(F(x), F(y))$ — совместное распределение случайных величин ξ для различных пар $u, v \in \Omega$. Бинарную операцию, задаваемую на интервале I ассоциированной копулой доживания, обозначим $*$ (см. [5]). Будем предполагать, что $*$ — архимедова T-норма.

Теорема. *Если $q(t) = 1 - F(|t|)$ является функций принадлежности нечеткой подгруппы в $\mathbf{R}$ относительно $*$, то отношение $\approx$ слабо транзитивно.*

В работе, представленной данным докладом, устанавливается, при каких значениях параметров условия теоремы выполняются для употребительных семейств распределений и T-норм. Например, для бета-распределений с функцией плотности

$$\frac{1}{B(r,s)} x^{r-1}(1-x)^{s-1}$$

и T-норм, порожденных аддитивными генераторами вида $(1-x)^a$, условия теоремы выполняются тогда и только тогда, когда $r + s \geqslant 2$, $a\,(r+s) \geqslant 2$, $ar \leqslant 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mordeson J. N.*, *Bhutani K. R.*, *Rosenfeld A.* Fuzzy Group Theory. Berlin etc.: Springer, 2005.
2. *De Baets B.*, *Mares M.*, *Mesiar R.* T-partitions of the real line generated by idempotent shapes. — Fuzzy Sets and Systems, 1997, v. 91, № 2, p. 177–184.

3. *Gisin V. B.* Fuzzy orderings of real numbers. — In: Towards a Unified Fuzzy Sets Theory. 2nd Joint IFSA-EC and Euro-WG Workshop on Fuzzy Sets, Visegrad, Hungary, 1990, p. 39–40.
4. *Gisin V. B.* Fuzzy positive cones of real numbers. — Proceedings of the 2nd european Cogress on Intelligence Techniques and Soft Computing (EUFIT 94). Aachen, September 20–23, Aachen: Verlag Mainz, 1996./ Ed. by H. J. Zimmerman. V. 2. 1994, p. 979–983.
5. *Nelsen R. B.* An Introduction to Copulas, NY. etc.: Springer, 2006.