Ю. Б. Б у р к а т о в с к а я, С. Э. В о р о б е й ч и к о в, Е. Е. С е р г е е в а (Томск, ТПУ, ТГУ). **Гарантированная оценка авторегрессионных параметров процесса AR(p)/ARCH(q).**

Рассматривается устойчивый случайный процесс AR(p)/ARCH(q)

$$x_k = \lambda_1 x_{k-1} + \lambda_2 x_{k-2} + \cdots + \lambda_p x_{k-p} + \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 x_{k-1}^2 + \alpha_2 x_{k-2}^2 + \cdots + \alpha_q x_{k-q}^2}\,\xi_k.$$

Здесь $\{\xi_k\}_{k\geqslant 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией. Ставится задача по наблюдениям за процессом $\{x_k\}$ оценить вектор неизвестных параметров $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p)^T$ с гарантированной точностью.

Так как дисперсия наблюдаемого процесса неизвестна и не ограничена сверху, преобразуем данную модель. Введем обозначение $m_k = \max\{1, |x_{k-1}|, |x_{k-2}|, \ldots, |x_{k-q}|\}$ и поделим обе части уравнения процесса на m_k, получим процесс

$$y_k = A_k \Lambda + \frac{1}{m_k}\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 x_{k-1}^2 + \alpha_2 x_{k-2}^2 + \cdots + \alpha_q x_{k-q}^2}\,\xi_k,$$

где $y_k = x_k/m_k$, $A_k = m_k^{-1}(x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_{k-p})$. Очевидно, дисперсия данного процесса ограничена величиной $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_q$.

Если параметры α_j неизвестны, то для компенсации их влияния требуется построить вспомогательную статистику Γ_n вида

$$\Gamma_n = B_n \sum_{k=1}^{n} \frac{\max_{\Lambda\in\Theta_p}\{X_k(\Lambda)\}}{\min\{1, x_{k-1}^2, x_{k-2}^2, \ldots, x_{k-q}^2\}}, \quad B_n = \mathcal{M}\biggl(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2\biggr)^{-1},$$

$$X_k(\Lambda) = \{(\lambda_1 x_{k-1} + \lambda_2 x_{k-2} + \cdots + \lambda_p x_{k-p})^2 + 2|x_k|\,|\lambda_1 x_{k-1} + \lambda_2 x_{k-2} + \cdots + \lambda_p x_{k-p}| + x_k^2\}.$$

Здесь Θ_p — область устойчивости процесса авторегрессии порядка p. Поиск максимума можно осуществить методами линейного программирования, так как для этого необходимо оптимизировать линейную форму $\lambda_1 x_{k-1} + \lambda_2 x_{k-2} + \cdots + \lambda_p x_{k-p}$ по переменным λ_i.

Построим теперь оценку вектора параметров Λ вида

$$\Lambda^*(H) = C^{-1}(\tau)\biggl(\sum_{k=n+1}^{\tau} v_k y_k A_k^T\biggr), \quad C(t) = \sum_{k=n+1}^{t} v_k A_k^T A_k,$$

где τ — случайный момент остановки, определяемый следующим образом: $\tau = \min\{t \geqslant n+1\colon \nu_{\min}(t) \geqslant H\}$, $\nu_{\min}(t)$ — минимальное собственное значение матрицы $C(t)$. Определим веса v_k. Пусть m — минимальное значение t, при котором матрица $C(n+t)$ неврожденна. На интервале $[n+1, n+m-1]$ веса имеют вид

$$v_k = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\Gamma_n A_k A_k^T}}, & \text{если } A_k \text{ линейно независим с } \{A_{n+1}, \ldots, A_{k-1}\},\\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

На интервале $[n+m, \tau]$ веса v_k определяются из условия

$$\frac{\nu_{\min}(t)}{\Gamma_n} = \sum_{l=n+m}^{t} v_k^2 A_k A_k^T \ (\forall\, n+m \leqslant t < \tau), \quad \frac{\nu_{\min}(\tau)}{\Gamma_n} \geqslant \sum_{l=n+m}^{\tau} v_k^2 A_k A_k^T, \quad \nu_{\min}(\tau) = H.$$

Момент остановки $\tau(H)$ конечен почти наверное. Свойство компенсирующего множителя $\mathcal{M}(1/\Gamma_n) \leqslant (\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_q)^{-1}$ и выбор весов v_k гарантируют, что среднеквадратическое отклонение оценки $\Lambda^*(H)$ от истинного значения параметров ограничено сверху величиной $\mathcal{M}\,\|\Lambda^*(H) - \Lambda\|^2 \leqslant (H+p-1)/H^2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 09-01-00172а.