В. В. Б р а т и щ е н к о (Иркутск, БГУЭП)**. Параметрическая биномиальная модель экзаменационных оценок.**

Оценка студента на экзамене зависит от трудности экзамена, уровня подготовленности студента и множества других факторов, которые будем полагать случайными. Для построения модели экзаменационной оценки предлагается использовать методологию параметрической теории тестирования (Item Response Theory), в частности, модель Раша [1], в которой вероятность $P(\theta,\delta) = e^{\theta}/(e^{\theta} + e^{\delta})$ правильного ответа на тестовое задание зависит от параметров δ — «трудности задания» и θ — «уровня подготовленности» тестируемого.

Для описания экзаменационных оценок предлагается использовать биномиальное распределение

$$\mathbf{P}\{X_{ij} = k\} = C_3^k \left(\frac{e^{\theta_i}}{e^{\theta_i} + e^{\delta_j}}\right)^k \left(\frac{e^{\delta_j}}{e^{\theta_i} + e^{\delta_j}}\right)^{3-k},$$

где X_{ij} — оценка i-го студента ($i = 1,2,\ldots,n$) на j-м экзамене ($j = 1,2,\ldots,m$), $k \in \{0,1,2,3\}$ — значение оценки («неуд.» — 0, «уд.» — 1, «хор.» — 2, «отл.» — 3), θ_i — параметр «подготовленности» i-го студента, δ_j — параметр «трудности» j-го экзамена.

Случайные величины $\{X_{ij}\}$ будем полагать независимыми в совокупности. Для определения параметров $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n$ и $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_m$ по известным оценкам $\|x_{ij}\|$ используем метод максимально правдоподобия. Логарифм функции правдоподобия

$$\begin{aligned}\ln(L) &= \ln\left(\prod_{i,j=1}^{n,m} C_3^{x_{ij}} \left(\frac{e^{\theta_i}}{e^{\theta_i} + e^{\delta_j}}\right)^{x_{ij}} \left(\frac{e^{\delta_j}}{e^{\theta_i} + e^{\delta_j}}\right)^{3-x_{ij}}\right)\\ &= \sum_{i,j=1}^{n,m}\left[\ln(C_3^{x_{ij}}) + x_{ij}\theta_i + (3-x_{ij})\delta_j - 3\ln(e^{\theta_i} + e^{\delta_j})\right]\end{aligned}$$

достигает максимума при следующих условиях (обозначим $\mu_{ij} = e^{\theta_i}/(e^{\theta_i} + e^{\delta_j})$):

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial\theta_i} = \sum_{j=1}^{m}[x_{ij} - 3\mu_{ij}] = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$
$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial\delta_j} = \sum_{i=1}^{n}[3\mu_{ij} - x_{ij}] = 0, \quad j = 1,2,\ldots,m.$$

Полученную систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{m}\mu_{ij} = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad \sum_{i=1}^{n}\mu_{ij} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}, \quad j = 1,2,\ldots,m,$$

можно решить численными методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нейман Ю. М., Хлебников В. А.* Введение в теорию моделирования и параметризации педагогических тестов. М.: Прометей, 2000, 168 с.