**Е. В. Карачанская** (Хабаровск, ТОГУ). **Об одном из обобщений формулы Ито–Вентцеля.**

В [1–3] был предложен специфический подход к стохастическому интегрированию, основанный на том, что производится отображение не точки, а ее окрестности по некоторому формальному правилу, что коренным образом отличается от традиционного, основанного на исчислении Маллявена. Переход к стохастическим уравнениям для конкретных реализаций происходит на основе сопоставления динамики элемента пространственной структуры, маркированной числом, с динамикой реализации траектории, для которой это число является начальным значением. Эта возможность обусловлена близостью, в вероятностном смысле, траекторий, стартовавших в области исходной окрестности на каждом из временных сечений.

Пусть $\mathbf{x}(t)$ — случайный процесс, определенный на $\mathbf{R}^n$, являющийся решением системы обобщенных стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$\begin{aligned} &dx_i(t) = a_i(t;\mathbf{x}(t))\,dt + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t;\mathbf{x}(t))\,dw_k(t) + \int_{R(\gamma)} g(t;\mathbf{x}(t);\gamma)\,\nu(dt;d\gamma), \\ &\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t;\mathbf{y}) = \mathbf{x}(t;\mathbf{x}(0))|_{t=0} = \mathbf{x}(0), \qquad t \geqslant 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{w}(t)$ — $m$-мерный винеровский процесс, $\nu(t;\Delta\gamma)$ — однородная по $t$ нецентрированная мера Пуассона. Относительно коэффициентов будем предполагать, что они ограничены и непрерывны вместе со своими производными $\partial a_i(t;\mathbf{x})/\partial x_j$, $\partial b_{i,k}(t;\mathbf{x})/\partial x_j$, $\partial g_i(t;\mathbf{x};\gamma)/\partial x_j$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, по совокупности переменных $(t;\mathbf{x};\gamma)$.

Рассмотрим случайный процесс $\mathbf{z}(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y})) \in \mathbf{R}^{n_0}$, где $\mathbf{x}(t;\mathbf{y})$ — решение системы СДУ (1), зависящее от случайных начальных данных $\mathbf{y}(0)$, а процесс $\mathbf{z}(t;\mathbf{x})$ определяется системой СДУ

$$d_t\mathbf{z}(t;\mathbf{x}) = \Pi(t;\mathbf{x})\,dt + D_k(t;\mathbf{x})\,dw_k(t) + \int_{R(\gamma)} \nu(dt;d\gamma), G(t;\mathbf{x};\gamma). \tag{2}$$

Относительно случайных функций $\Pi(t;\mathbf{x})$, $D_k(t;\mathbf{x})$, $G(t;\mathbf{x};\gamma)$, определенных на пространстве $\mathbf{R}^{n_0}$, предполагаем, что они непрерывны и ограничены вместе со своими производными по всем переменным, измеримые относительно потока $\sigma$-алгебр $\mathcal{F}_t$, согласованного с процессами $\mathbf{w}(t)$ и $\nu(t;\Delta\gamma)$ из (1), и удовлетворяют условиям существования и единственности решения [4, с. 281]. Тогда имеет место следующий факт.

**Утверждение.** *Пусть* $\mathbf{x}(t)$ *и* $\mathbf{z}(t;\mathbf{x})$ *— случайные процессы, являющиеся решениями* (1) *и* (2) соответственно. Если $\mathbf{x}(t;\mathbf{y})$ — решение (1), зависящее от случайных начальных данных $\mathbf{y} = \mathbf{x}(0)$, то сложный случайный процесс $\mathbf{z}(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} d_t\mathbf{z}(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y})) = {} & \left( D_k(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y})) + b_{ik}(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))\frac{\partial \mathbf{z}(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))}{\partial x_i} \right) dw_k(t) \\ & + \left( \Pi(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y})) + a_i(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))\frac{\partial \mathbf{z}(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))}{\partial x_i} + b_{ik}(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))\frac{\partial D_k(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))}{\partial x_i} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} b_{ik}(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y})) b_{j\,k}(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))\frac{\partial^2 \mathbf{z}(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))}{\partial x_i \partial x_j} \right) dt \\ & + \int_{R(\gamma)} G(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}) + g(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y});\gamma)\nu(dt;d\gamma) \\ & + \int_{R(\gamma)} [\mathbf{z}\Big(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}) + g(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y});\gamma)) - \mathbf{z}(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{y}))]\nu(dt;d\gamma). \end{aligned} \tag{3}$$

По аналогии с известной терминологией, формулу (3) назовем *обобщенной формулой Ито–Вентцеля* [3].

Полученная формула отличается од других обобщений, например, от [5], относящейся к процессу только с пуассоновскими скачками, и от [3], полученной для обобщенного уравнения Ито с центрированной пуассоновской мерой.

Предложенное обобщение формулы Ито–Вентцеля и понятие стохастического первого интеграла [3] позволяет, как отмечено в [6], строить программные управления стохастических динамических систем, подверженных случайным возмущениям, вызванным винеровскими возмущениями и пуассоновскими скачками [7, 8].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Дубко В. А.* Первый интеграл системы стохастических дифференциальных уравнений. Ппрепринт. Киев: АН УССР, Ин-т математики, 1978, 22 с.
2. *Дубко В. А.* Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1989, 185 с.
3. *Дубко В. А.* Відкриті еволюціонуючі системи. — В сб..: Перша міжнародна науково-практична конференція «Відкриті еволюціонуючі системи» (Київ, 26–27 квіт. 2002 р.). Київ: ВНЗ ВМУРоЛ, 2002, с. 14–31.
4. *Гихман И. И.*, *Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова Думка, 1968, 354 с.
5. *Oksendal B.*, *Zhang T.* The Ito–Ventcel formula and forward stochastic differential equation driven by Poisson random measures. — Osaka J. Math., 2007, v. 44, p. 207–230.
6. *Чалых Е.В.* Программное управление с вероятностью 1 для открытых систем. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 2, с. 253–254.
7. *Чалых Е. В.* Построение множества программных управлений с вероятностью 1 для одного класса стохастических систем. — Автоматика и телемеханика, 2009, т. 70, № 8, с. 110–122.
8. *Карачанская Е. В.* Построение программных управлений с вероятностью 1 для динамической системы с пуассоновскими возмущениями. — Вестник Тихоокеанского госуниверситета, 2011. (В печати.)