В. В. Киселев (Москва, ФГОУ ВПО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»). **Частный случай задачи оптимального управления.**

Рассмотрим частный случай задачи оптимального управления, когда исходная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\dot{x}_1 = f_1(u_1), \ \ \dot{x}_2 = f_2(u_2), \ \ \ldots, \ \ \dot{x}_k = f_k(u_k), \ \ \dot{x}_{k+1} = f_{k+1}(x,t), \ \ \ldots, \ \ \dot{x}_N = f_N(x,t).$$

Задано $x(t_0) = x^0$, $u \in U \subset \mathbf{R}^k$. Требуется минимизировать $\int_0^T f(x,t)\,dt$.

Полагаем $\dot{x}_{N+1} = 1 = f_{N+1}$, $x_{N+1}(0) = 0$, $\dot{x}_0 = F = f_0$, $x_0(0) = 0$.

Для исходной системы можно записать систему сопряженных уравнений

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{N+1} \varphi_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad \varphi_0 = -1, \quad \frac{d\varphi_0}{dt} = 0.$$

Далее будем рассматривать расширенные векторы $\overline{f}, \overline{\varphi} \in \mathbf{R}^{N+2}$,

Введем следующие обозначения. Если все функции $f_i(u_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, желательно максимизировать, то на множестве U можно выделить множество Парето-оптимальных решений $\overline{U}_\Pi$, если же все перечисленные выше функции желательно минимизировать, то можно выделить множество Парето-оптимальных точек $\widetilde{U}_\Pi$.

Теорема 1. *Если известно, что* $\varphi_i(t) \geqslant 0$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, k$, *то для принципа максимума верно следующее равенство*: $\max_{u \in U} (\overline{\varphi}, \overline{f}) = \max_{u \in \overline{U}_\Pi} (\overline{\varphi}, \overline{f})$.

Теорема 2. *Если известно, что* $\varphi_i(t) \leqslant 0$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, k$, *то для принципа максимума верно следующее равенство*: $\max_{u \in U} (\overline{\varphi}, \overline{f}) = \max_{u \in \widetilde{U}_\Pi} (\overline{\varphi}, \overline{f})$.