М. Е. С м о р к а л о в (Нижний Новгород, ННГУ). **Среднее значение квадрата определителя в классе (0,1)-матриц, содержащих заданное число единиц.**

Пусть $M^n(i)$ — класс булевых матриц размера $n \times n$, содержащих ровно i единиц. Целью работы, представленной данным докладом, является нахождение средней величины $\mathrm{Average}_{B\in M^n(i)}(\mathrm{Det}^2(B))$ квадрата определителя матриц из класса $M^n(i)$.

Метод, использованный в работе, был впервые предложен Патриком О'Нейлом [1] для нахождения среднего значения перманента и квадрата перманента матриц из класса $M^n(i)$.

Теорема. *Среднее значение величины квадрата определителя матриц из класса $M^n(i)$ может быть найдено по следующей формуле*:

$$\underset{B\in M^n(i)}{\mathrm{Average}}(\mathrm{Det}^2(B)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n!)^2\,(-1)^{n-k-1}\,(n-k-1)}{k!\,(n-k)!}\,\frac{\prod_{j=0}^{2n-k-1}(i-j)}{\prod_{j=0}^{2n-k-1}(n^2-j)}. \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. строится следующим образом. Выберем случайным образом матрицу $B \in M^n(i)$. Пусть π и σ — переменные, принимающие значения из S_n — группы перестановок на n элементах.

Обозначим x_π^B такую случайную переменную, зависящую от (0,1)-матрицы B и перестановки π, что $x_\pi^B = \mathrm{sgn}(\pi)$, если при всех $j = 1, 2, \ldots, n$ из равенства $\pi(j) = k$ следует $B(j,k) = 1$, в противном случае $x_\pi^B = 0$. Здесь $\mathrm{sgn}\,(\pi)$ — знак перестановки π. Таким образом, x_π^B определяет вклад перестановки π в значение определителя матрицы B.

Квадрат определителя произвольной матрицы $B \in M^n(i)$ теперь можно представить в виде $(\mathrm{Det}\,(B))^2 = \sum_{\pi\in S_n} x_\pi^B \sum_{\sigma\in S_n} x_\sigma^B = \sum_{\pi\in S_n}\sum_{\sigma\in S_n} x_\pi^B\, x_\sigma^B$. При этом

$$\underset{B\in M^n(i)}{\mathrm{Average}}(\mathrm{Det}^2(B)) = \sum_{\pi\in S_n}\sum_{\sigma\in S_n} \mathbf{E}\,(x_\pi^B\, x_\sigma^B), \tag{2}$$

где $\mathbf{E}(\cdot)$ — знак математического ожидания.

Рассмотрим упорядоченные пары $(\pi,\sigma) \in S_n \times S_n$. Разобьем множество $S_n \times S_n$ следующим образом:

$$S_n \times S_n = B_0^+ + B_0^- + B_1^+ + B_1^- + \cdots + B_n^+ + B_n^-. \tag{3}$$

Пара $(\pi,\sigma) \in B_k^+$, если: 1) $\pi(j) = \sigma(j)$ для ровно k натуральных значений j на отрезке от 1 до n; 2) $\mathrm{sgn}\,(\pi) = \mathrm{sgn}\,(\sigma)$.

Пара $(\pi,\sigma) \in B_k^-$, если: 1) $\pi(j) = \sigma(j)$ для ровно k натуральных значений j на отрезке от 1 до n; 2) $\mathrm{sgn}\,(\pi) = -\mathrm{sgn}\,(\sigma)$.

Оценим количество элементов в B_k^+ (B_k^-). Перестановку π можно выбрать $n!$ способами, а набор общих точек π и σ — $\binom{n}{k}$ способами. Остальные значения перестановки σ определяются количеством беспорядков на множестве из $(n-k)$ элементов, имеющих такую же (другую) по отношению к перестановке π четность. Обозначим это количество D_{n-k}^+ (D_{n-k}^-).

В работе[2] показано, что $D_i^+ - D_i^- = (-1)^{i-1}\,(i-1)$. Таким образом, справедливо следующее равенство:

$$B_k^+ - B_k^- = n!\binom{n}{k}(-1)^{n-k-1}\,(n-k-1). \tag{4}$$

Найдем математическое ожидание случайной величины (с. в.) $x_\pi^B\, x_\omega^B$ на каждом из участков разбиения (3). Так как на каждом из участков B_k^+ данная с.в. принимает либо значение 0, либо значение 1, то

$$\mathbf{E}\,(x_\pi^B\, x_\omega^B) = \mathbf{P}\,\{x_\pi^B\, x_\omega^B = 1\}, \tag{5}$$

где $\mathbf{P}\{\cdot\}$ — вероятность соответствующего события.

Аналогично, для участков B_k^- справедливо

$$\mathbf{E}\,(x_\pi^B\,x_\omega^B) = -\mathbf{P}\,\{x_\pi^B\,x_\omega^B = -1\}. \tag{6}$$

Рассмотрим $(\pi,\sigma) \in B_k^+$. Мы можем определить $\mathbf{P}\,\{x_\pi^B\,x_\omega^B = 1\}$, вычислив количество матриц B, для которых $x_\pi^B\,x_\omega^B = 1$, и поделив это значение на мощность множества $M^n(i)$.

Матрица B, такая, что $x_\pi^B\,x_\omega^B = 1$, имеет $(2n-k)$ таких единиц на позициях (j,k), что либо $\pi(j)=k$, либо $\sigma(j)=k$. Остальные единицы могут располагаться где угодно, обеспечивая таким образом $\binom{n^2-2n+k}{i-n}$ вариантов.

Отсюда

$$P_k = \mathbf{P}\,\{x_\pi^B\,x_\omega^B = 1\} = \binom{n^2-2n+k}{i-n}\Big/\binom{n^2}{i} = \frac{\prod_{j=0}^{2n-k-1}(i-j)}{\prod_{j=0}^{2n-k-1}(n^2-j)}. \tag{7}$$

Аналогичное утверждение справедливо для $(\pi,\sigma) \in B_k^-$:

$$P_k = \mathbf{P}\,\{x_\pi^B\,x_\omega^B = -1\} = \binom{n^2-2n+k}{i-n}\Big/\binom{n^2}{i} = \frac{\prod_{j=0}^{2n-k-1}(i-j)}{\prod_{j=0}^{2n-k-1}(n^2-j)}. \tag{8}$$

Заметим, что P_k в (6) и (7) не зависят от выбора $(\pi,\sigma) \in B_k^{+/-}$, и, значит, (2) может быть переписано следующим образом:

$$\operatorname*{Average}_{B\in M^n(i)}(\mathrm{Det}^2(B)) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\eta\in\{+,-\}} \#B_k^\eta\,\mathbf{E}\,(x_\pi^B\,x_\sigma^B),$$

где $\#B_k^\eta$ обозначает мощность множества B_k^η.

Принимая во внимание (5) и (6), имеем

$$\operatorname*{Average}_{B\in M^n(i)}(\mathrm{Det}^2(B)) = \sum_{k=0}^{n}(\#B_k^+ - \#B_k^-)\,P_k.$$

Наконец, используя (4), (7) и (8), получаем (1).

Следствие. *При* $i=n$

$$\operatorname*{Average}_{B\in M^n(n)}(\mathrm{Det}^2(B)) = \frac{(n!)^2\,(n^2-n)!}{(n^2)!}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *O'Neil P. E.* Asymptotics in random (0,1)-matrices. — Bull. Amer. Math. Soc., 1969, v. 75, № 6, p. 1276–1282.
2. *Shattuck M.* Parity theorems for statistics on permutations and Catalan words. — Integers: Electonic J. of Combinatorial Number Theory, 5–2005. — # A07.