Г. С. Камбарбаева (Москва, МГУ). **Об асимптотическом поведении оптимальных стратегий инвестирования в модели рынка Белецкого–Плиски.**

В [1, 2] рассмотрена задача оптимальной стратегии управления портфелем ценных бумаг в модели рынка Белецкого и Плиски. В этой модели стоимости активов S_i портфеля описываются стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ) с трендами, зависящими от макроэкономических факторов, которые также подчинены СДУ. В случае одного фактора, $r(t)$, модель имеет вид

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = (A_i + \alpha_i r(t))\,dt + \sum_{k=1}^{n+1} \sigma_{ik}\,dW_k(t), \quad dr(t) = (B + \beta r(t))\,dt + \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k\,dW_k(t),$$

$S_i(0) = s_i > 0$, $r(0) = r > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Здесь $A_i, \alpha_i, B \geqslant 0$, $\beta < 0$, $\sigma_{ik} \geqslant 0$, $\lambda_k \geqslant 0$ — заданные константы, σ_{ik} не все равны нулю, а W_k, $k = 1, 2, \ldots, n+1$, обозначают независимые броуновские движения.

Пусть $h_i(t)$ — доля капитала, инвестированная в i-й актив в момент времени t, т. е. $\sum_{i=1}^n h_i = 1$. Тогда капитал портфеля $V(t) = \sum_{i=1}^n h_i(t) S_i(t)$. При этом оптимальная стратегия $\overline{h}$ находится как решение задачи максимизации функционала $Q_h(t) = \mathbf{M}\,(\ln V|r) - \gamma \mathbf{D}\,(\ln V|r)$ над классом допустимых стратегий $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$. $Q_h(t)$ соответствует математическому ожиданию доходности портфеля за минусом ошибки, пропорциональной дисперсии этой доходности с некоторым коэффициентом $\gamma > 0$ (коэффициентом *неприятия риска*) при фиксированном значении фактора (например, процентной ставки). В [2] излагается общая стратегия нахождения долей капитала, инвестированного в портфель из любого конечного числа активов. Функции, отвечающие долям капитала, вложенным в каждый из активов, могут быть найдены в явном виде. Их выражения достаточно громоздки, однако зависимость от времени ограничивается лишь степенными и экспоненциальными функциями. В работе, представленной данным докладом, исследуется асимптотика долей капитала при стремящемся к бесконечности времени для важнейших случаев двух и трех активов ($n = 2$ и $n = 3$).

Утверждение. *Пусть $n = 2$. Если $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то*

$$\overline{h}_1^\infty = \lim_{t\to\infty} \overline{h}_1(t) = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad \overline{h}_2^\infty = 1 - \overline{h}_1^\infty.$$

Если $\alpha_1 = \alpha_2$, то

$$\overline{h}_1^\infty = K_1 \cdot \infty, \quad K_1 = \frac{\gamma\alpha_1((\sigma_{11} - \sigma_{12})\lambda_1 + (\sigma_{21} - \sigma_{22})\lambda_2 + (\sigma_{31} - \sigma_{32})\lambda_3)}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(2\beta\gamma - 1)},$$

где $\sigma_i^2 = \sum_{k=1}^3 \sigma_{ik}^2$, $i = 1, 2$. Если $K_1 = 0$, то

$$\overline{h}_1(t) \equiv \overline{h}_1^\infty = \frac{(2\beta\gamma - 1)\sigma_2^2 + A_2 - A_1}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(2\beta\gamma - 1)}.$$

Таким образом, в общем случае асимптотика стратегий вложения зависит только от значений параметров α_1, α_2. На малых временах стратегия вложения зависит от всех параметров модели и значительно отличается от предельной. Ниже мы опишем влияние этих параметров на характер стратегий: 1) увеличение модулей параметров β и γ влечет более быстрый выход на асимптотику; 2) при малых временах уменьшение волатильности i-го актива (величины σ_i) влечет за собой увеличение доли этого актива в портфеле; 3) несмотря на то, что тренд A_i не влияет на асимптотику стратегии вложения, на малых временах влияние этого параметра очень значительно (увеличение A_i влечет за собой увеличение доли соответствующего актива).

Так, при больших временах вне зависимости от его тренда и волатильности предпочтительным оказывается тот актив, который зависит от фактора наименьшим образом (соответствующее α_i меньше всего по модулю), тогда как при малых временах оптимальная стратегия предсказуемым образом зависит от всех параметров модели.

В **случае трех активов** ($n = 3$) пределы по времени для оптимальных стратегий $\overline{h}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, также найдены. Соответствующие выражения достаточно громоздки и мы не будем их здесь выписывать. Отметим, что предельное поведение зависит в общем случае от всех параметров модели, и такое отличие от случая двух активов может показаться странным. Однако если параметры α_i у какой-то пары активов совпадают, то ситуация аналогична случаю двух активов. А именно, если, например, $\alpha_2 = \alpha_3$, то при любых значениях остальных параметров $\widehat{h}_1^\infty = \alpha_2/(\alpha_2-\alpha_1)$. При этом $\widehat{h}_2^\infty$ и $\widehat{h}_3^\infty$ зависят и от остальных параметров модели. Случай совпадения всех α_i, как и ранее, является вырожденным,

$$\overline{h}_1^\infty = \mathcal{K}_1 \cdot \infty, \quad \mathcal{K}_1 = \gamma\alpha_1 \left(\sum_{l=1}^{4} \lambda_l \sum_{i,j,k} (-1)^{i+j-1} \sigma_k^2 (\sigma_{il} - \sigma_{jl}) \right) \left((2\beta\gamma - 1) \sum_{i \neq j,\, i,j=1}^{3} \sigma_i^2 \sigma_j^2 \right)^{-1},$$

где $\sigma_i^2 = \sum_{k=1}^4 \sigma_{ik}^2$, $i = 1, 2, 3$. Если $\mathcal{K}_1 = 0$, то

$$\overline{h}_1(t) \equiv \overline{h}_1^\infty = (2\beta\gamma - 1)\sigma_2^2\sigma_3^2 + (A_2 - A_1)\sigma_3^2 + (A_3 - A_1)\sigma_2^2) \left((2\beta\gamma - 1) \sum_{i \neq j,\, i,j=1}^{3} \sigma_i^2 \sigma_j^2 \right)^{-1},$$

где i, j, k — все четные перестановки индексов $(1, 2, 3)$.

При малых временах влияние параметров модели аналогично случаю двух активов.

В предложенной в [2] стратегии в качестве начального может быть выбран любой момент времени. Соответственно, нужно разумным образом определить моменты времени, когда целесообразно время «обнулять» и актуализировать параметры модели. Для каждого набора параметров существует своя «бесконечность», т. е. время фактического выхода на асимптотику T. Для реальных данных T имеет порядок нескольких лет. Знание этого времени T позволяет разумным образом определить момент пересчета параметров модели как момент, когда стратегия начинает выходить на асиптотику. Из наших рассмотрений вытекает, в частности, что чем больше чувствительный риску параметр γ, тем T меньше, а, значит, актуализировать параметры модели нужно чаще.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Камбарбаева Г. С.* О некоторых явных формулах для вычисления условных математических ожиданий случайных величин и их применениях. — Вестник Московского ун-та, сер. матем. мех., 2010, № 5, с. 10–15.
2. *Камбарбаева Г. С.* Задача составления эффективного портфеля в модели рынка согласно Белецкому и Плиске. — Вестник Московского ун-та, сер. матем. мех., 2011. (В печати.)