А. Е. Гуськов, М. И. Толовиков (Череповец, ЧГУ). **Эргодичность случайных процессов, переходы в которых образуют цепи Маркова.**

Пусть $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$ — случайный процесс с множеством состояний $\mathbf{E} = \{1, 2, \ldots, d\}$. Рассмотрим случайные процессы $(Z_n^k)_{n=0}^{\infty}$, определенные следующим образом: $Z_n^k = Z_{\nu_n^k+1}$, где $\nu_n^k = \min\{m \,|\, \sum_{j=0}^{m} I\{Z_j = k\} = n\}$, $k = 1, 2, \ldots, d$. Иными словами, Z_n^k есть элемент траектории процесса $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$, следующий за n-м появлением состояния k в этой траектории. Процессы $(Z_n^k)_{n=1}^{\infty}$ будем называть *переходами процесса* $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$. Будем говорить, что переходы процесса $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$ образуют цепи Маркова, если процессы $(Z_n^k)_{n=1}^{\infty}$ являются не зависящими друг от друга и от Z_0 однородными цепями Маркова.

Распределение процесса $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$, переходы в котором образуют цепи Маркова, полностью определяется следующими параметрами:

1) начальное распределение процесса $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$: $q_r = \mathbf{P}\{Z_0 = r\}$, $r = 1, 2, \ldots, d$;

2) начальные распределения цепей $(Z_n^k)_{n=1}^{\infty}$: $q_r^k = \mathbf{P}\{Z_1^k = r\}$, $k, r = 1, 2, \ldots, d$;

3) переходные вероятности цепей $(Z_n^k)_{n=1}^{\infty}$: $p_{rl}^k = \mathbf{P}\{Z_{n+1}^k = l \,|\, Z_n^k = r\}$, $k, r, l = 1, 2, \ldots, d$.

Распределение процесса $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$, переходы в котором образуют цепи Маркова, можно смоделировать при помощи дискретной однородной цепи Маркова $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ с конечным множеством состояний. Множество состояний цепи $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ есть множество пар $M = \{(f, r) | f\colon\ \mathbf{E}^d \to \mathbf{E},\ r \in \mathbf{E}\}$. Начальное распределение определяется условием $\mathbf{P}\{X_0 = (f, r)\} = q_r \prod_{k=1}^{d} q_{f(k)}^k$, а переходные вероятности — условиями $\mathbf{P}\{X_{n+1} = (g, f(r)) \,|\, X_n = (f, r)\} = p_{f(r)g(r)}^r$ при $f(m) = g(m)$ для всех $m \neq r$, $\mathbf{P}(X_{n+1} = (g, l) \,|\, X_n = (f, r)\} = 0$ в остальных случаях.

Теорема 1. *Распределение случайного процесса $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$ совпадает с распределением процесса $(\pi(X_n))_{n=0}^{\infty}$, где отображение $\pi\colon M \to \mathbf{E}$ действует по правилу $\pi((f, r)) = r$.*

Рассмотрим теперь вопрос эргодичности процесса $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$.

Теорема 2. *Пусть все цепи Маркова $(Z_n^k)_{n=1}^{\infty}$, $k = 1, 2, \ldots, d$, являются эргодическими и $(p_{kr}^*)_{r=1}^{d}$ — стационарное (предельное) распределение цепи $(Z_n^k)_{n=1}^{\infty}$. Пусть, кроме того, цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей $(p_{kr}^*)_{k,r=1}^{d}$ является эргодической и $(p_k^*)_{k=1}^{d}$ — ее стационарное (предельное) распределение. Тогда:*

1) *цепь $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ является эргодической и ее стационарное распределение определяется равенствами $p_{(f,r)}^* = p_r^* \prod_{k=1}^{d} p_{f(k)}^*$ для любого состояния $(f, r) \in M$;*

2) *процесс $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$ обладает стационарным распределением в следующем смысле: если положить $q_r = p_r^*$, $q_r^k = p_{kr}^*$, $k, r = 1, 2, \ldots, d$, то $\mathbf{P}\{Z_n = r\} = p_r^*$, $r = 1, 2, \ldots, d$, для любого $n \geqslant 0$;*

3) *распределение из пункта 2 является предельным: $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{Z_n = r\} = p_r^*$, $r = 1, 2, \ldots, d$, каковы бы ни были q_r, q_r^k, $k, r = 1, 2, \ldots, d$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 11-01-00139а.