М. И. Толовиков (Череповец, ЧГУ). **Случайные блуждания и произведение Адамара степенных рядов.**

Пусть на одном вероятностном пространстве определены две не зависящие друг от друга последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$. *Осциллирующим случайным блужданием* будем называть последовательность $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$, определенную условиями: $Z_0 = 0$; если $n > 0$, то $Z_n = Z_{n-1} - Y_n$ при $Z_n > 0$, $Z_n = Z_{n-1} + X_n$ при $Z_n \leqslant 0$.

Пусть случайные величины последовательностей $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ принимают неотрицательные целые значения. Тогда осциллирующее случайное блуждание $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$ является марковской цепью с множеством состояний $\mathbf{Z}$ и вероятностями переходов $\mathbf{P}\{Z_n = j \,|\, Z_{n-1} = i\} = \mathbf{P}\{Y_1 = i - j\}$ при $i > 0$, $j \leqslant i$; $\mathbf{P}\{Z_n = j \,|\, Z_{n-1} = i\} = \mathbf{P}\{X_1 = j - i\}$ при $i \leqslant 0$, $j \geqslant i$, $\mathbf{P}\{Z_n = j \,|\, Z_{n-1} = i\} = 0$ в остальных случаях. Начальным состоянием с вероятностью 1 является состояние 0. Для такого случайного блуждания справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. 1. *Пусть* $\nu_n = \sum_{i=0}^{n-1} I\{Z_i > 0\}$ — *время, проведенное на положительной полуоси за первые* n *шагов случайным блужданием* $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$. *Тогда* $\mathbf{P}\{Z_n = 0,\, \nu_n = k\} = \mathbf{P}\{\sum_{i=1}^{n-k} X_i = \sum_{j=1}^{k} Y_j\}$ *при всех* $n > 0$, $k < n$.

2. $\mathbf{P}\{Z_n = 0\} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}\{\sum_{i=1}^{n-k} X_i = \sum_{j=1}^{k} Y_j\}$ *при всех* $n > 0$.
(*Если верхний предел суммирования меньше нижнего, то сумму считаем равной нулю.*)

Введем в рассмотрение производящие функции $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{X_1 = n\}x^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{Y_1 = n\}x^n$, $H(\lambda,\mu) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\sum_{i=1}^{m} X_i = \sum_{j=1}^{n} Y_j\}\lambda^m\mu^n$, $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{Z_n = 0\}x^n$. *Произведением Адамара* степенных рядов $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ и $\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ называется ряд $\varphi(t) * \psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n t^n$.

Теорема 2.

$$H(\lambda,\mu) = \left(\frac{1}{1-\lambda f(t)} * \frac{1}{1-\mu g(t)}\right)\bigg|_{t=1}, \quad h(x) = \left(\frac{1}{1-xf(t)} * \frac{1}{1-xg(t)}\right)\bigg|_{t=1}.$$

(*Произведения Адамара — по переменной* t).

Предположим теперь, что случайные величины X_1 и Y_1 принимают только значения из множеств $\{0,1,\dots,M\}$ и $\{0,1,\dots,m\}$ соответственно. Тогда множеством состояний цепи $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$ можем считать конечное множество $\{-m+1,-m+2,\dots,M-1,M\}$. Пронумеруем состояния в порядке возрастания числами $1,2,\dots,m+M$ и обозначим $P = (p_{ij})$ матрицу переходов цепи $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$. Тогда $p_{ij} = \mathbf{P}\{Y_1 = i - j\}$ при $i > m$, $j \leqslant i$; $p_{ij} = \mathbf{P}\{X_1 = j - i)$ при $i \leqq m$, $j \geqq i$; $p_{ij} = 0$ в остальных случаях. Следующий результат легко получается методом «трансфер-матрицы» [1, с. 354–356].

Теорема 3. $h(x) = \det(E - xP)_{mm}/\det(E - xP)$, *где* E — *единичная матрица порядка* $m+M$, $(E-xP)_{mm}$ — *матрица, полученная из* $E - xP$ *вычеркиванием строки и столбца с номером* m.

В качестве следствия теорем 2 и 3 получаем следующую явную формулу для произведения Адамара.

Теорема 4. *Пусть* $\varphi(t) = (1 - \sum_{i=1}^{M} a_i t^i)^{-1}$, $\psi(t) = (1 - \sum_{j=1}^{m} b_j t^j)^{-1}$ *и* $C = (c_{ij})$ — *такая квадратная матрица порядка* $m+M$, *что*

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{j-i}u^{j-i}, & \text{при } 1 \leqslant i \leqslant m,\ 0 \leqq j-i \leqslant M, \\ b_{i-j}v^{i-j}, & \text{при } m+1 \leqslant i \leqslant M+m,\ 0 \leqslant i-j \leqslant m, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$\varphi(t) * \psi(t) = \frac{\det(E-C)_{mm}}{\det(E-C)}\bigg|_{u=t,\, v=1} = \frac{\det(E-C)_{mm}}{\det(E-C)}\bigg|_{u=1,\, v=t}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 11-01-00139а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. М.: Мир, 1990.