И. В. Мисюра (Ростов-на-Дону, ЮФУ). **Фильтрация в дискретном времени винеровского процесса со скачком.**

Наблюдается винеровский процесс со скачком $X(t,\omega)$, после дискретизации которого с заданным шагом получаем вектор $X(\omega)$ размерности n, $X(t,\omega) \to X(\omega)$. Вектор $X(\omega)$ представим в следующем виде: $X(\omega) = Y(\omega) + N(\omega)$, где $Y(\omega)$ — винеровский процесс со скачком, $N(\omega)$ – шум, причем $N(\omega) \in \mathcal{N}(0, \sigma^2_{\text{шума}} E)$ является нормально распределенным случайным вектором.

Пусть $y_{i+1} - y_i = r_{i+1}$, $i = 1,2,\ldots,n-1$. Тогда $AY = DR$, где $D = \operatorname{diag}(1,\ldots,\alpha,\ldots,1)$, причем $\alpha \geqslant 1$, R является нормально распределенным случайным вектором ($R \in \mathcal{N}(0, \sigma^2_{\text{сигнала}} E)$) и матрица A является теплицевой, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для выделения винеровского процесса без шума применим метод максимального правдоподобия Фишера. Для нахождения максимально правдоподобной оценки вектора Y перейдем к решению следующей задачи:

$$\frac{1}{\sigma^2_{\text{шума}}}(Y - X, Y_x) + (C_Y^{-1} Y, Y) \to \min_Y,$$

где C_y — ковариационная матрица вектора Y. Решая эту задачу, получаем $C_y = \sigma^2_{\text{сигнала}} A^{-1} \widetilde{D} (A^{-1})^T$, где $\widetilde{D} = DD^T = \operatorname{diag}(1,\ldots,\alpha^2,\ldots,1)$. Тогда $C_Y^{-1} = \sigma^{-2}_{\text{сигнала}} A^T D' A$, где $D' = \widetilde{D}^{-1}$. Следовательно, $Y = (E + \gamma A^T D' A)^{-1} X$, где $\gamma = \sigma^2_{\text{шума}} / \sigma^2_{\text{сигнала}}$.

Представим $D' = E - D_j$, где $D_j = \operatorname{diag}(1,\ldots,(\alpha^2-1)/\alpha^2,\ldots,1)$ — матрица ранга, равного единице.

В [1] представлен алгоритм вычисления матрицы H^{-1}, где $H = E + \gamma A^T A$. Получаем $Y = (H - \gamma A^T D_j A)^{-1} X$, или $X = (H - \gamma A^T D_j A) Y$.

Поскольку матрица $A^T D_j A$ имеет ранг, равный единице, ее можно представить как произведение некоторого вектора b на ему транспонированный. Тогда имеем $X = (H - \gamma b b^T) Y$.

Выполним преобразования: $HY - \gamma b(b,Y) = X$, $Y - \gamma (b,Y) H^{-1} b = H^{-1} X$. Найдя скалярное произведение (b,Y), получаем эффективную формулу для выделения винеровского процесса со скачком: $Y = H^{-1} X + \gamma (b,Y) H^{-1} b$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мисюра И. В.* Один метод фильтрации случайного сигнала. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 6, с. 911–912.