С. Г. Х а л и у л л и н (Казань, КФУ). **О гиперконечной аппроксимации стохастических дифференциальных уравнений.**

Дадим вначале необходимые определения. Напомним, что *ультрафильтром* в множестве $\mathbf{E}$ называется фильтр в множестве $\mathbf{E}$, не мажорируемый никаким отличным от него фильтром в $\mathbf{E}$.

Легко видеть, что $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbf{E}\colon A$ содержит элемент $x_0 \in \mathbf{E}\}$ является ультрафильтром в множестве $\mathbf{E}$. Такой ультрафильтр называют *тривиальным* (или *несвободным*). Существование нетривиальных ультрафильтров устанавливается только с помощью теоремы Цорна (см., например, [1]).

О п р е д е л е н и е 1 (см., например, [2]). Пусть $\mathbf{A}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ — произвольные непустые множества, $\mathcal{U}$ — нетривиальный ультрафильтр в множестве $\mathbb{N}$. В декартовом произведении $\prod_{n=1}^{\infty} A_n = \{(a_n)_{n=1}^{\infty}\colon a_n \in A_n\}$ введем отношение эквивалентности по ультрафильтру $\mathcal{U}$, полагая, что два элемента (a_n) и (b_n) эквивалентны по ультрафильтру $\mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда множество $\{n \in \mathbb{N}\colon a_n = b_n\}$ содержится в ультрафильтре $\mathcal{U}$. Фактор-пространство декартова произведения множеств A_n $(n \in \mathbb{N})$ по данному отношению эквивалентности называется *теоретико-множественным ультрапроизведением* семейства множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и обозначается $(A_n)_{\mathcal{U}}$.

В том частном случае, когда все множества A_n конечны, множество $(A_n)_{\mathcal{U}}$ называется *гиперконечным*.

О п р е д е л е н и е 2. Говорят, что точка $x \in \mathbf{K}$ является пределом по ультрафильтру $\mathfrak{U}$ последовательности (x_n) $(x = \lim_{\mathfrak{U}} x_n)$, если для любой окрестности U точки x множество $\{n\colon x_n \in U\}$ содержится в ультрафильтре $\mathfrak{U}$.

Хорошо известно, что если $\mathbf{K}$ — компактное хаусдорфово пространство, $\mathfrak{U}$ — произвольный ультрафильтр в множестве $\mathbb{N}$, то любая последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in \mathbf{K}$, имеет и причем единственный предел по ультрафильтру $\mathfrak{U}$.

Будем считать, что на некотором вероятностном пространстве задан случайный процесс $X_t = X(t,\omega)$, $t \in [0,1]$. Также предположим, что значения этого процесса наблюдаемы в не более, чем конечном множестве точек отрезка $[0,1]$.

С целью восстановления процесса для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество точек вида $T_n = \{t_n^k = k\Delta_n\colon 0 \leqslant k \leqslant n\}$, где $\Delta_n = 1/n$. Гиперконечное множество $\mathbf{T} = (T_n)_{\mathcal{U}}$, где $\mathcal{U}$ — произвольный нетривиальный ультрафильтр в множестве $\mathbb{N}$, называется *гиперконечным отрезком времени* $[0,1]$. Ясно, что со «стандартной точки зрения» множество $\mathbf{T}$ является континуальным и в определенном смысле может служить «заменой» отрезка $[0,1]$ (подробнее см. [3]).

Рассмотрим далее для каждого n общее неоднородное разностное стохастическое уравнение (процесс авторегрессии) порядка p:

$$\phi_n(B)x_n^k = \sigma\varepsilon_n^k, \tag{1}$$

x_n^k — наблюдение процесса $X = X(t,\omega)$ в момент времени t_n^k, B — оператор сдвига вдоль последовательности x_n^k (по k), $\phi_n(B) = 1 - \phi_n^1 B - \phi_n^2 B^2 - \dots - \phi_n^p B^p$ — оператор авторегрессии, $\varepsilon_n^k \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Хорошо известно, что уравнение (1) при определенных условиях на коэффициенты имеет стационарное решение, причем это решение получается чрезвычайно просто (см., например, [4]).

Теорема. *Решения $X^{(n)}(t_n)$ стохастического разностного уравнения* (1) *сходятся по ультрафильтру к X_t, являющемуся решением соответствующего уравнению* (1) *дифференциального уравнения, где $t = \lim_{\mathcal{U}} t_n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя несложные преобразования и обозначив

$$X^{(n)}(t_n) = \frac{x_n^k}{\sqrt{n}}, \quad W^{(n)}(t_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i, \quad A^{(n)}(t_n) = \frac{k}{n}$$

для всех $0 \leqslant k \leqslant n$ и $k/n \leqslant t_n < (k+1)/n$, получим представление уравнения, использующее разности вплоть до порядка p:

$$\Psi(\Delta^p X^{(n)}(t_n), \dots, X^{(n)}(t_n); \Delta^p A^{(n)}(t_n), \dots, A^{(n)}(t_n); \Delta W^{(n)}(t_n)) = 0,$$

где Ψ — некоторая линейная функция.

Рассмотрим ультрапроизведение от обеих частей последнего равенства. В результате мы получаем гиперконечное разностное стохастическое уравнение, которое легко интерпретировать как дифференциальное. Предел по ультрафильтру $\mathfrak{U}$ является стохастическим дифференциальным уравнением, соответствующим уравнению (1). Заключение теоремы следует из построения соответствующих решений.

П р и м е р. Рассмотрим для каждого n неоднородное разностное стохастическое уравнение, описывающее стационарный при $|\theta| < 1$ процесс авторегрессии первого порядка: $x_n^k = \theta_n x_n^{k-1} + \sigma\varepsilon_n^k$, $x_n^0 = 0$, где x_n^k — наблюдение процесса $X = X(t, \omega)$ в момент времени t_n^k, $\varepsilon_n^k \sim \mathbf{N}(0, 1)$. Тогда

$$(\Delta X^{(n)}(t_n))_{\mathfrak{U}} = -(\alpha_n X^{(n)}(t_n))_{\mathfrak{U}} (\Delta A^{(n)}(t_n))_{\mathfrak{U}} + (\Delta W^{(n)}(t_n))_{\mathfrak{U}},$$

где $\alpha_n = n(1 - \theta)$. Переходя теперь к пределу по ультрафильтру $\mathfrak{U}$, получаем стохастическое дифференциальное уравнение, описывающее известный процесс Орнштайна–Уленбека: $dX_t = -\alpha X_t\, dt + \sigma\, dW_t$.

Эти результаты могут быть распространены на некоторые нестационарные процессы, для которых взятие разностей приводит к стационарному процессу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. М.: Физматгиз, 1958.
2. *Heinrich S.* Ultraproducts in Banach space theory. — J. fuer die reine und angewandte Math., 1980, v. 313, p. 72–104.
3. *Альбеверио С.*, *Фенстанд Й.*, *Хенг-Крон Р.*, *Линдстрем Т.* Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М.: Мир, 1990.
4. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989.