О. В. Назарько, И. В. Павлов (Ростов-на-Дону, РГСУ). **Построение деформаций 1-го рода по процессу плотностей на дискретном фильтрованном пространстве.**

Пусть дано дискретное фильтрованное пространство $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty})$, т. е. для любого $n \in \mathcal{N} = \{0, 1, \ldots\}$ σ-алгебра $\mathcal{F}_n$ порождена разбиением Ω на не более, чем счетное число атомов. Обозначим $\mathcal{D}_n$ множество всех атомов σ-алгебры $\mathcal{F}_n$. Семейство $\mathbf{Q} = (Q^{(n)}, \mathcal{F}^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ вероятностных мер $Q^{(n)}$ на $\mathcal{F}_n$ называется *деформацией* 1-*го рода* (D_1), если для любого $n \in \mathcal{N}$ выполняется соотношение $Q^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} \ll Q^{(n)}$. С такой деформацией естественным образом ассоциируется процесс плотностей $(h_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$: $dQ^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} = h_n\, dQ^{(n)}$.

В данном докладе дается ответ на следующий вопрос: при каких условиях на неотрицательный процесс $H = (h_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ существует такая D_1 $\mathbf{Q}$, что H является процессом плотностей деформации $\mathbf{Q}$? В дальнейшем значение с. в. h_n на атоме $D \in \mathcal{D}_n$ мы обозначаем $h_n(D)$.

Введем момент остановки: $\tau = \inf\{n \in \mathcal{N}\colon\ h_n = 0\}$. Не нарушая общности, будем считать, что процесс $(h_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет следующему условию: $h_n = 0$ при $n \geqslant \tau$. Кроме того, мы предполагаем, что выполняется естественное условие: $h_n \not\equiv 0$ для всех $n \in \mathcal{N}$.

Пусть $D_{n+1} \in \mathcal{D}_{n+1}$. Обозначим D_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, такой атом из $\mathcal{D}_k$, что $D_k \supset D_{n+1}$. Ясно, что $\Omega = D_0 \supset D_1 \supset D_2 \supset \cdots \supset D_n \supset D_{n+1}$. Обозначим $(D_{n+1}^i)_{1 \leqslant i < m+1}$ совокупность всех таких атомов из $\mathcal{D}_{n+1}$, что $\sum_{i=1}^m D_{n+1}^i = D_n$. Отметим, что m может равняться ∞ и что среди атомов $(D_{n+1}^i)_{1 \leqslant i < m+1}$ присутствует D_{n+1}.

Теорема 1 (достаточные условия существования деформации)**.** *Пусть для всех $n \in \mathcal{N}$ и для люого такого D_n, что $D_n \in \mathcal{D}_n$ и $h_n(D_n) > 0$, выполняются либо равенства*

$$\inf_{1 \leqslant i < m+1} h_{n+1}(D_{n+1}^i) = \sup_{1 \leqslant i < m+1} h_{n+1}(D_{n+1}^i) = 1,$$

либо неравенства

$$\inf_{1 \leqslant i < m+1} h_{n+1}(D_{n+1}^i) < 1 < \sup_{1 \leqslant i < m+1} h_{n+1}(D_{n+1}^i).$$

Тогда существует деформация 1-го рода с процессом плотностей $(h_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$.

При выполнении условий теоремы 1 деформации 1-го рода можно вычислять, решая для всех $n \in \mathcal{N}$ и для всех $D_n \in \mathcal{D}_n \cap \{h_n > 0\}$ следующие системы неравенств:

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad \sum_{i=1}^m h_{n+1}(D_{n+1}^i) x_i = 1, \quad x_i > 0, \quad 1 \leqslant i < m+1.$$

Теорема 2 (необходимые и достаточные условия существования деформации)**.** *Адаптированный процесс $(h_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ является процессом плотностей некоторой деформации 1-го рода $\mathbf{Q} = (Q^{(n)}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ тогда и только тогда, когда существует адаптированный строго положительный случайный процесс $(p_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$, $p_0 := 1$, удовлетворяющий условиям $\sum_{i=1}^m p_{n+1}(D_{n+1}^i) = 1$ для всех таких $n \in \mathcal{N}$, и $D_n \in \mathcal{D}_n$, что $h_n(D_n) > 0$, и такой, что для всех $n \in \mathcal{N}$ выполняется равенство*

$$\sum_{D_{n+1} \in \mathcal{D}_{n+1}} \prod_{k=0}^{n} p_{k+1}(D_{k+1}) h_k(D_k) = 1,$$

где суммирование производится по всем атомам $D_{n+1} \in \mathcal{D}_{n+1}$.

Следствие. *Пусть $H = (h_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ — строго положительный процесс и $(p_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ — процесс из теоремы 2, связывающий H и $\mathbf{Q}$. Тогда существует* *такая согласованная последовательность вероятностных мер* $(P^{(n)}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$, *что выполняется соотношение* $p_{n+1}(D_{n+1}^i) = P^{(n+1)}(D_{n+1}^i)/P^{(n)}(D_n)$.

Для бинарной фильтрации реализация теоремы 2 содержится в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Назарько О. В.* Слабые деформации на бинарных финансовых рынках. — Изв. ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки, 2010, т. 15, в. 4, с. 12–18.