Д. Х. Муштари (Казань, К(П)ФУ). **Меры на квантовых логиках идемпотентных матриц над конечными полями и рациональными числами.**

Квантовые логики — обобщения булевых алгебр. Они являются ортомодулярными частично упорядоченными множествами с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1. Множество $\mathfrak{P}(\mathcal{M})$ всех идемпотентов в алгебре $\mathcal{M}$ с единицей является квантовой логикой с естественным порядком: $P \leqq Q$, если $PQ = QP = P$, также P и Q называются *ортогональными*, если $PQ = QP = 0$. *Заряды* μ на квантовых логиках со значениями в некотором поле определяются соотношением $\mu(\vee_n P_n) = \sum_n \mu(P_n)$ для любой последовательности попарно ортогональных элементов.

Знаменитая теорема Глисона утверждает, что любой неотрицательный заряд μ на квантовой логике $\Pi(H)$ всех проекторов (эрмитовых идемпотентов) на гильбертовом пространстве H, $\dim H > 2$, допускает представление $\mu(P) = \mathrm{tr}\,(TP)$ для всех $P \in \Pi(H)$.

Автор доказал аналогичное представление для зарядов на квантовой логике всех непрерывных идемпотентов на гильбертовом пространстве. Аналоги этого утверждения для простых полей и полей из 4, 8 или 9 элементов имеют следующий вид:

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{P}(\mathbf{F}^n)$ — квантовая логика всех идемпотентных $(n \times n)$-матриц $(n > 2)$ с матричными элементами из простого поля $\mathbf{F}$ (в частности, поля рациональных чисел).*

Тогда любой заряд μ на $\mathfrak{P}(\mathbf{F}^n)$ со значениями в $\mathbf{F}$ однозначно определеяется своими значениями на идемпотентах, составляющих базис в пространстве всех $\mathbf{F}$-элементных $(n \times n)$-матриц.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{P}(\mathbf{F}^n_{p^s})$ — квантовая логика всех идемпотентных $(n \times n)$-матриц $(n > 2)$ с матричными элементами из конечного поля $\mathbf{F}_{p^s}$ из p^s элементов, где p^s равно 4, 8 или 9. Тогда любой заряд μ на $\mathfrak{P}(\mathbf{F}^n_{p^s})$ со значениями в $\mathbf{F}_p$ однозначно определеяется своими значениями на идемпотентах, составляющих базис в пространстве всех $\mathbf{F}_{p^s}$-элементных $(n \times n)$-матриц со следом в $\mathbf{F}_p$.*

Теорема 1 была доказана в [1], а теорема 2 для случая $p^s = 4$ — в [2] с существенным использованием доказательных компьютерных вычислений. В настоящее время удалось доказать компьютерным способом теорему 2 для полей из 8 и 9 элементов, а также доказать результаты [1] и [2] явным образом, заменив компьютерные вычисления последовательным использованием симметризаций зарядов μ.

Возможно, что положительное решение имеет *проблема* переноса теорем 1 и 2 на все конечные поля и на расширения поля рациональных чисел.

Рассматривались также рациональные заряды на квантовых логиках $\Pi(\mathbf{Q}^n)$ всех эрмитовых рациональных идемпотентных $(n \times n)$-матриц и $\Pi_0(\mathbf{Q}^n)$ всех проекторов, порожденных единичной рациональной сферой в $\mathbf{Q}^n$. Для некоторых n удается доказать, что такие заряды не могут быть двузначными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mushtari D.* Gleason-type theorems for signed measures on orthomodular posets of projections on linear spaces. — Internat. J. Theor. Physics, 1995, v. 34, № 8, p. 1627–1635.
2. *Mushtari D.* Gleason-type theorem for linear spaces over the field of four elements. — Internat. J. Theor. Physics, 1998, v. 37, № 1, p. 127–130.