Л. П. Терехова (Казань, КФ(П)У). **Почти наверное предельная теорема для Санкт-Петербургской игры со случайным количеством партий.**

ВВедем обозначения: $\xrightarrow{d}$ есть сходимость по распределению, $\xrightarrow{w}$ есть слабая сходимость мер, μ_ζ — распределение случайной величины ζ, $\lfloor x \rfloor$ – наибольшее целое, не превосходящее x.

Санкт-Петербургский парадокс является одной из классических задач теории вероятностей. В основе этого парадокса лежит так называемая *Санкт-Петербургская игра*, которая состоит в подбрасывании монеты до тех пор, пока не выпадет орел. Выигрыш игрока с каждой удачной партией удваивается. Если X — это выигрыш, то $\mathbf{P}\{X = 2^j\} = 2^{-j}$, $j = 1, 2, \ldots$ Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \mathbf{P}\{X \leqslant x\} = 1 - 2^{-\lfloor \log_2 x \rfloor}, \qquad x \geqq 2. \tag{1}$$

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — выигрыши игрока в последовательности независимых партий Санкт-Петербургской игры, т. е. независимые одинаково распределенные случайные величины, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, с функцией распределения (1), а $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ — общий выигрыш игрока в n партиях.

Последовательность случайных величин, при помощи которой описывается Санкт-Петербургская игра, не сходится слабо. Тем не менее, логарифмически нормированные суммы этих случайных величин сходятся по распределению, их предельное распределение является смесью полуустойчивых законов, и для этой последовательности справедлива почти наверное предельная теорема. Пусть

$$G(x) = \frac{1}{\log 2} \int_{1/2}^{1} \frac{G_\gamma(x)}{\gamma}\, d\gamma, \tag{2}$$

где G_γ — функция распределенная с характеристической функцией

$$g_\gamma(t) = \exp\left\{ it \log_2 \frac{1}{\gamma} + \left[\sum_{r=-\infty}^{0} \left(e^{it2^r/\gamma} - 1 - it\frac{2^r}{\gamma} \right) \frac{\gamma}{2^r} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(e^{it2^r/\gamma} - 1 \right) \frac{\gamma}{2^r} \right] \right\}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

В [1] была получена следующая почти наверное предельная теорема для Санкт-Петербургской игры.

Теорема 1. *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — выигрыши игрока в независимых партиях Санкт-Петербургской игры и $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Тогда*

$$\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \delta_{(S_k/k - \log_2 k)(\omega)} \xrightarrow{w} G(x), \quad n \to \infty,$$

для почти всех $\omega \in \Omega$ и любого $x \in \mathbf{R}$, где G — функция распределения, определенная формулой (2).

Предположим, что ν_n — независимые целочисленные случайные величины, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Рассмотрим случайные суммы

$$S_n^\nu = \sum_{i=1}^{\nu_n} X_i = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} X_i\, I_{\{\nu_n = k\}}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Предположим, что $\nu_n/n \xrightarrow{d} \nu$ при $n \to \infty$, $\mathbf{E}\,\nu_n < \infty$, семейства $\{\nu_n\}$ и $\{X_n\}$ независимы. Тогда для почти всех $\omega \in \Omega$*

$$\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \delta_{(S_n^\nu/n - (\nu_n/n)\log_2 \nu_n)(\omega)} \xrightarrow{w} \mathcal{L} \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где мера $\mathcal{L}$ имеет характеристическую функцию

$$\varphi_{\mathcal{L}}(t) = \frac{1}{\log 2} \int_{1/2}^{1} \int_{0}^{\infty} \frac{g_s^u(t)}{s} e^{-itu \log_2 u} \, d\mu_\nu(u) \, ds, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Berkes I.*, *Csáki E.*, *Chörgő S.* Almost sure limit theorems for the St. Petersburg game. — Statistics and Probability Letters, 1999, № 45, p. 23–30.