ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2012

В. И. Хохлов, Ю. В. Прохоров, О. В. Висков (Москва, МИ РАН). **Применение обобщенного тождества Чена к задаче линеаризации для произведений многочленов Пуассона–Шарлье.**

Недавно полученное в [1] обобщение тождества Чена (ср. [2]) позволило применить разработанный авторами в [3] подход к решению задачи линеаризации для произведений многочленов Пуассона–Шарлье (см., например, [4, с. 47, формула (2.81.2)])

$$C_\alpha(x)=\sum_{\nu=0}^{\alpha}(-1)^{\alpha-\nu}\binom{\alpha}{\nu}\nu!\,\lambda^{-\nu}\binom{x}{\nu}=\frac{1}{\lambda^\alpha}\left([x]-\lambda\right)^\alpha, \qquad \alpha=0,1,2,\dots$$

(вторым использовано выражение этих многочленов в форме факториально-степенных биномов [5]), образующих систему ортогональных относительно распределения π_λ Пуассона с параметром λ многочленов, т. е. систему многочленов, для которых $\mathbf{M}\,C_\alpha(\pi_\lambda)\,C_\beta(\pi_\lambda)=\dfrac{\alpha!}{\lambda^\alpha}\,\delta_{\alpha\beta}$, где $\mathbf{P}\{\pi_\lambda=\nu\}=e^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^\nu}{\nu!}$, $\delta_{\alpha\beta}$ — дельта Кронекера, $\alpha,\beta=0,1,2,\dots$

Напомним, что задачей линеаризации мы называем задачу нахождения коэффициентов $a_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\mu}$ в представлении

$$C_{\alpha_1}(x)C_{\alpha_2}(x)\cdots C_{\alpha_k}(x)=\sum_{\mu=0}^{\infty}a_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\mu}\,C_\mu(x).$$

Умножив обе части этого представления на $C_\gamma(x)$, подставив вместо x случайную величину π_λ и взяв математические ожидания обеих частей, в силу ортогональности системы $\{C_\alpha\}_{\alpha=0,1,2,\dots}$ сводим эту задачу к задаче вычисления математических ожиданий (сумм) $b_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\gamma}=\mathbf{M}\,C_{\alpha_1}(\pi_\lambda)C_{\alpha_2}(\pi_\lambda)\cdots C_{\alpha_k}(\pi_\lambda)C_{\alpha_\gamma}(\pi_\lambda)=\dfrac{\gamma\,!}{\lambda^\gamma}\,a_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\gamma}$, а решение этой задачи доставляет следующая теорема.

Теорема. *Для экспоненциальной производящей функции коэффициентов* $b_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\gamma}$ *справедливо выражение*

$$\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k=0}^{\infty}b_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\gamma}\,\frac{z_1^{\alpha_1}\,z_2^{\alpha_2}\,\cdots\,z_k^{\alpha_k}}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\cdots\,\alpha_k!}=\frac{\left(H_{z_1z_2\dots z_k}-1\right)^\gamma e^{\lambda\left(H_{z_1z_2\dots z_k}-1\right)}}{e^{z_1+z_2+\dots+z_k}}$$

в котором

$$H_{z_1z_2\dots z_k}=\left(1-\frac{1}{z_1}\right)\left(1-\frac{1}{z_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{z_k}\right).$$

Доказательство теоремы следует доказательству, проведенному в [3], п. б) на с. 837, для коэффициентов линеаризации произведений многочленов Эрмита. При этом обобщенное тождество Стейна заменяется на обобщенное тождество

Чена из [1] и учитывается, что для экспоненциальной производящей функции многочленов Пуассона—Шарлье (ср. [4, с. 48, формула (2.81.3)])

$$\sum_{\alpha}^{\infty} C_\alpha(x)\,\frac{z^\alpha}{\alpha!} = \sum_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\lambda^\alpha}\,\big([x]-\lambda\big)^\alpha\,\frac{z^\alpha}{\alpha!} = \sum_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\alpha!}\left(\frac{z}{\lambda}\big([x]-\lambda\big)\right)^\alpha = e^{\frac{z}{\lambda}[x]-\frac{z}{\lambda}\lambda} = \left(1+\frac{z}{\lambda}\right)^x \frac{1}{e^z}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прохоров Ю.В.*, *Висков О.В.*, *Хохлов В.И.* Многочлены Пуассона–Шарлье и обобщение тождества Чена. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 1, с. 1–8.
2. *Chen L. H. Y.* Poisson approximation for dependent trials. — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 3, p. 534–545.
3. *Прохоров Ю.В.*, *Висков О.В.*, *Хохлов В.И.* Обобщенное тождество Стейна и его применение к задаче линеаризации для многочленов Эрмита. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 18, в. 6, с. 833–838.
4. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962, 500 с.
5. *Хохлов В. И.* Многочлены, ортогональные относительно полиномиального распределения, и факториально-степенной формализм. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 3, с. 585–592.