ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2,3
2012

А. Н. Тихомиров (Сыктывкар, Коми НЦ УрО РАН, СыктГУ). **О предельном распределении спектра произведения независимых случайных матриц большой размерности.**

В настоящем докладе представлены результаты автора, полученные совместно с Ф. Гетце.

Пусть $m \geqslant 1$ — фиксированное натуральное число. Рассмотрим семейство независимых случайных величин $X_{jk}^{(l)}$, $l = 1, 2, \dots, m$, $j, k = 1, 2, \dots, n$. Будем предполагать, что

$$\mathbf{E}\, X_{jk}^{(l)} = 0, \quad \mathbf{E}\, |X_{jk}^{(l)}|^2 = 1. \tag{1}$$

Введем в рассмотрение матрицы $\mathbf{X}^{(l)} = (X_{jk}^{(l)})$, $l = 1, 2, \dots, m$, $j, k = 1, \dots, n$. Определим матрицу $\mathbf{W} = n^{-m/2} \prod_{l=1}^{m} \mathbf{X}^{(l)}$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ означают собственные числа матрицы $\mathbf{W}$, а μ_n означает эмпирическое распределение на множестве собственных чисел $\mathbf{W}$ (эмпирическая мера приписывает каждому элементу соответствующего множества вероятность $1/n$). Нас будет интересовать асимптотика мер μ_n.

Для эмпирической спектральной меры μ_n получен следующий результат.

Теорема. *Пусть выполнено условие* (1). *Предположим, что квадраты случайных величин* $X_{jk}^{(l)}$, $l = 1, 2, \dots, m$, $j, k = 1, 2, \dots, n$, *равномерно интегрируемы, т. е.*

$$\sup_{j,k,l,n} \mathbf{E}\, \big|X_{jk}^{(l)}\big|^2 \mathbf{I}\big\{|X_{jk}^{(l)}| \geqslant M\big\} \to 0, \quad \text{когда} \quad M \to \infty. \tag{2}$$

Тогда $\mathbf{E}\, \mu_n$ *слабо сходится к распределению в единичном круге комплексной плоскости с лебеговой плотностью*

$$p_m(x, y) = \frac{1}{\pi m (x^2 + y^2)^{(m-1)/m}} \mathbf{I}\,\{x^2 + y^2 \leqslant 1\}. \tag{3}$$

Замечание. Плотность $p_m(x, y)$ является плотностью распределения случайной величины ζ^m, где ζ — равномерно распределенная в единичном круге случайная величина. В случае $m = 1$ теорема 1 представляет собой известный круговой закон для случайных матриц (подробнее о круговом законе см., например, [3]).

Результат теоремы опубликован в [1, 4]. Данный результат остается в силе и для симметричных случайных матриц, т. е. предельным распределением эмпирической спектральной меры μ_n произведения независимых симметричных случайных матриц при тех же ограничениях на моменты случайных величин (условия (1) и (2)) будет мера μ с плотностью (3). Более того, результат теоремы остается в силе и для матриц, симметричные элементы которых попарно коррелированы. В случае $m = 1$, как показал В. Гирко в [2], предельное распределение меры μ_n для таких матриц — равномерное распределение в эллипсе, оси которого определяются коэффициентом корреляции. Соответствующее утверждение получило название *эллиптического закона для* *случайных матриц.* Наши результаты показывают, что в случае произведения двух и более матриц предельное распределение не зависит от коэффициента корреляции.

Работа частично поддержана РФФИ, проекты № 11-01-00310а, № 11-01-12104-офи_м.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев Н. В., Гетце Ф., Тихомиров А. Н.* О сингулярном спектре степеней и произведений случайных матриц. — Доклады АН, 2010, т. 433, № 1, с. 7–9.
2. *Гирко В. Л.* Эллиптический закон. — Теория вероятн. и ее примен., 1985, т. 30, в. 4, с. 640–651.
3. *Götze F., Tikhomirov A. N.* The circular law for random matrices. — Ann. of Probab., 2010, v. 38, № 4, p. 1444–1491.
4. *Götze F., Tikhomirov A. N.* On the Asymptotic Spectrum Product of Independent Random Matrices. Preprint. arXiv:1012.2710, 40 p.