ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2012

Е. К. Волосова (Москва, МГУПС). **Анализ уравнения Блэка–Шоулса в случае переменного актива.**

Различные подходы к анализу уравнений типа Блэка–Шоулса (Б–Ш) предпринимались в [1, 2]. Рассмотрим некоторое платежное обязательство (европейский опцион на покупку), контрактная функция $V(s,t)$ которого зависит от цены s на один переменный актив. Такой случай представляет не только теоретический интерес и до сих пор не разобран. Геометрические (экономические) броуновские движения соответствуют параметру диффузии (средние квадратичные отклонения, волатильность) обозначим σ. Стоимость самофинансируемого портфеля $\Pi(t)$ из одного финансового инструмента, количество которого, допустим, зависит от цены и времени $\delta(s,t)$, в момент времени t имеет вид $\Pi(t) = V - \delta(s,t)$. Предположим, что функция $\delta(s,t)$ в среднем аппроксимирует переменный состав портфеля. Классические общеизвестные формулы следуют, если предполагается линейная зависимость $\delta(s,t) = \delta_0 s$, $\delta_0 = \mathrm{const}$. Пусть цена актива, лежащего в основе опционного контракта, испытывает логарифмические блуждания $ds = \mu s\,dt + \sigma s\,dW$. Здесь μ — положительные коэффициенты сноса, $W = W_t$ есть процесс броуновского движения.

Изменение стоимости всего портфеля записывается как $d\Pi = dV - \delta'_s(s,t)\,ds$, а невозможность арбитража приводит к условию $d\Pi = r\Pi\,dt = r(V - \delta(s,t))\,dt$, где r — мгновенная процентная ставка. Далее используем формулу Ито для изменения цены финансового инструмента $dV = [V'_t + (1/2)(\sigma s)^2 V''_{ss} + \mu s V'_s]\,dt + \sigma s V'_s\,dW$. Учитывая все приведенные соотношения, получим $[V'_t + (1/2)(\sigma s)^2 V''_{ss} + \mu s V'_s - rV + r\delta(s,t) - \mu s \delta'_s(s,t)]\,dt + \sigma s[V'_s - \delta'_s(s,t)]\,dW = 0$. Приравнивая к нулю коэффициент при стохастическом слагаемом dW, получим важный промежуточный вывод $\delta(s,t) = V(s,t) + \Lambda(t)$. *Состав портфеля в среднем должен отслеживать цену финансового инструмента.* После подстановки и последующих стандартных преобразований получим уравнение для определения цены финансового инструмента

$$V'_t + \frac{1}{2}(\sigma s)^2 V''_{ss} + r\Lambda(t) = 0. \qquad (1)$$

Данное уравнение имеет точное решение, с использованием которого строится модифицированная формула Б–Ш и можно вычислить минимальный размер премии.

Теорема. *Пусть дано уравнение* (1) *с начальными условиями* $V(s,T) = \omega(s)$. *Тогда точное решение задачи Коши с правой частью для уравнения* (1) *имеет вид* $V(s,t) = e^{\alpha y + \beta\tau} U(y,\tau)$, *где введены обозначения переменных* $t = T - \tau$, $y = \sigma^{-1} \exp\{s e^{r(T-t)}/k + \sigma/2\}$, $k = \mathrm{const}$ (*страйк цена*), *и справедливы соотношения между константами* $\alpha = r/\sigma + \sigma/2$, $\beta = -(r/2 + r^2/(2\sigma^2) + \sigma^2/8)$. *Функция* $U(y,\tau)$ *удовлетворяет линейному параболическому уравнению теплопроводности* (*диффузии*)

$$U'_\tau(y,\tau) - \frac{1}{2}U''_{yy} = \Phi(y,\tau). \qquad (2)$$

Функция $\Phi(y,\tau)$ *имеет вид* $\Phi(y,\tau) = -e^{-\alpha y - \beta\tau} r\Lambda(T-\tau)$.

Комментарии к доказательству. После замены, приведенной в теореме, уравнение (1) переходит в (2).

Решение задачи Коши с правой частью дается формулой [4] $U(y,\tau) = \int_0^\infty \omega(\xi)G(y,\xi\tau)\,d\xi + \int_0^\tau \int_0^\infty \Phi(\xi,\theta)G(y,\xi,\tau-\theta)\,d\xi\,d\theta,$ где

$$G(y,\xi,\tau) = (2\pi\tau)^{-1/2}(e^{-(y-\xi)^2/(2\tau)} - e^{-(y+\xi)^2/(2\tau)}).$$

В классических расчетах, связанных с формулой Б–Ш, слагаемое, вызываемое правой частью уравнения (2), не учитывалось. В тексте выше выделено курсивом важное замечание. Оно дает ключ к пониманию, как получить функцию, описывающую правую часть. Надо проанализировать при помощи численных методов имеющийся практический материал и попытаться выделить из него данные, описывающие искомую функцию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шведов А. С.* Процентные финансовые инструменты: оценки и хеджирование. М.: ГУ ВШЭ, 2001, 152 с.
2. *Bjork T.* Arbitrage Theory in Continuous Time. Oxford: Oxford University Press, 2003.
3. *Волосов К. А.*, *Вдовина Е. К.*, *Синицын С. О.* Неподвижные точки стохастических полумаятников и точные решения уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка. М.: МИИТ, 2011, 158 с.
4. *Карслоу Г.*, *Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964, 488 с.