ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2,3
2012

Ю. С. Харин (Минск, БГУ). **Цепи Маркова высокого порядка: малопараметрические модели и их вероятностно-статистический анализ.**

Универсальной математической моделью для реальных процессов с дискретным временем $t \in \mathbf{N}$, конечным пространством значений $\mathbf{A} = \{0, 1, \ldots, N-1\}$, $2 \leqslant N < +\infty$, и заданной достаточно большой глубиной памяти $s \in \mathbf{N}$ является однородная цепь Маркова s-го порядка ЦМ(s) $x_t \in \mathbf{A}$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, определяемая обобщенным марковским свойством $(t > s)$:

$$\mathbf{P}\{x_t{=}i_t | x_{t-1}{=}i_{t-1}, \ldots, x_1{=}i_1\} = \mathbf{P}\{x_t{=}i_t | x_{t-1}{=}i_{t-1}, \ldots, x_{t-s}{=}i_{t-s}\} = p_{i_{t-s}, \ldots, i_t},$$

где $P{=}(p_{j_1, \ldots, j_{s+1}})$ — $(s+1)$-мерная матрица вероятностей одношаговых переходов.

К сожалению, число независимых параметров ЦМ(s) экспоненциально растет при увеличении глубины памяти s: $D_{\text{ЦМ}(s)} = N^{s+1} - 1$, и для идентификации этой модели необходимы реализации огромной длительности порядка $O(N^{s+1})$. Чтобы преодолеть этот парадокс размерности предлагается использовать так называемые малопараметрические модели [1] цепей Маркова s-го порядка, определяемые малым числом параметров $d \ll D_{\text{ЦМ}(s)}$.

В работе рассматриваются следующие малопараметрические модели цепей Маркова высокого порядка: модель Джекобса–Льюиса [1]

$$p_{j_1, \ldots, j_{s+1}} = (1-\rho)\pi_{i_{s+1}} + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \cdot \delta_{i_{s-j+1}, i_{s+1}}, \quad i_1, \ldots, i_{s+1} \in \mathbf{A},$$

где δ_{jk} — символ Кронеккера, $\rho \in (0,1)$ и дискретные вероятностные распределения $\{\pi_i : i \in \mathbf{A}\}$, $\{\lambda_j : j \in \{1, \ldots, s\}\}$ являются параметрами модели (их число $d = N + s - 1$); MTD-модель Рафтери [1]

$$p_{i_1, \ldots, i_{s+1}} = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j q_{i_j, i_{s+1}}, \quad i_1, \ldots, i_{s+1} \in \mathbf{A},$$

где $d = N^2 + s - 1$; параметрами этой модели являются стохастическая $(N \times N)$-матрица $Q = (q_{ik})$ и дискретное распределение вероятностей $\{\lambda_j\}$; цепь Маркова s-го порядка с r частичными связями ЦМ(s,r) [2]; цепь Маркова условного порядка [3]. Для этих малопараметрических моделей установлены вероятностные свойства, в том числе, критерии эргодичности, а также решены задачи статистического оценивания параметров и проверки гипотез по наблюдаемой реализации $X_1^n = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{A}^n$. Проиллюстрируем некоторые результаты для ЦМ(s,r).

Цепь Маркова s-го порядка с r частичными связями определяется следующей параметризацией матрицы $\mathbf{P}$:

$$p_{i_1, \ldots, i_{s+1}} = p_{J_1^{s+1}} = q_{j_{m_1}, \ldots, j_{m_r}, j_{s+1}},$$

где $J_1^{s+1} = (j_1, j_2, \ldots, j_{s+1}) \in \mathbf{A}^{s+1}$ — мультииндекс, r — число связей $(1 \leqslant r \leqslant s)$; $M_1^r = (m_1, m_2, \ldots, m_r)$ — целочисленный вектор с r упорядоченными компонентами, $1 = m_1 < m_2 < \ldots < m_r \leqslant s$, называемый шаблоном связей; $Q{=}(q_{J_1^{r+1}})$ есть стохастическая матрица размера $(r+1) \times (r+1)$. Если $r = s$, то ЦМ (s, s) совпадает с полносвязной цепью Маркова ЦМ (s).

Теорема 1. *ЦМ (s, r) эргодична тогда и только тогда, когда*

$$\exists i \in \mathbf{N} : \min_{J_1^s, J_{s+1+i}^{2s+i}} \sum_{J_{s+1}^{s+i} \in \mathbf{A}^i} \prod_{k=1}^{s+i} q_{j_{k+m_1-1}, \ldots, j_{k+m_r-1}, j_{k+s}} > 0.$$

Обозначим:

$$H\big(\{\mu_{J_1^{r+1}}\}\big) = -\sum_{J_1^{r+1} \in \mathbf{A}^{r+1}} \mu_{J_1^{r+1}}(M_1^r) \ln\big(\mu_{J_1^{r+1}}(M_1^r)/\mu_{J_1^{r+1}\cdot}(M_1^r)\big) \geqslant 0,$$

$$F\big(J_i^{i+s-1}; M_1^r\big) = (j_{i+m_1-1}, \ldots, j_{i+m_r-1}),$$

$$\widehat{\mu}_{J_1^{r+1}}(M_1^r) = (n-s)^{-1} \sum_{t=1}^{n-s} \delta_{F(X_t^{t+s-1}; M_1^r), J_1^r} \delta_{x_{t+s}, j_{r+1}}.$$

Теорема 2. *Оценка максимального правдоподобия (ОМП) для матрицы Q имеет вид*:

$$\widehat{q}_{J_1^{r+1}} = \big\{\widehat{\mu}_{J_1^{r+1}}(M_1^r)/\widehat{\mu}_{J_1^{r+1}\cdot}(M_1^r),\ \textit{если}\ \widehat{\mu}_{J_1^{r+1}\cdot} > 0;\ N^{-1}\ \textit{иначе}\big\}, \quad J_1^{r+1} \in \mathbf{A}^{r+1}.$$

Если выполнено условие эргодичности и ЦМ (s, r) стационарна, то при $n \to +\infty$ уклонение $\widehat{Q} - Q$ распределено асимптотически нормально с известной асимптотической ковариацией.

Теорема 3. *Если s, r известны, то ОМП для шаблона M_1^r имеет вид* $\widehat{M_1^r} = \arg\min_{M_1^r} H(\{\widehat{\mu}_{J_1^{r+1}}\})$; *для стационарной ЦМ (s, r) эта оценка состоятельна при* $n {\to} {+}\infty$: $\widehat{M_1^r} \xrightarrow{\mathbf{P}} M_1^r$.

Теория иллюстрируется численными результатами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Харин Ю. С.* Оптимальность и робастность в статистическом прогнозировании. Минск: БГУ, 2008.
2. *Харин Ю. С., Петлицкий А. И.* Цепь Маркова s-го порядка с r частичными связями и статистические выводы о ее параметрах. — Дискретн. матем., 2007, т. 12, в. 2, с. 109–130.
3. *Харин Ю. С., Мальцев М. В.* Алгоритмы статистического анализа цепей Маркова с условной глубиной памяти. — Информатика, 2011, №1, с. 34–43.