О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 19 М А Т Е М А Т И К И В ы п у с к 2,3
2012

В. И. А ф а н а с ь е в (Москва, МИРАН)**. О времени достижения высокого уровня случайным блужданием в случайной среде.**

Пусть задана последовательность независимых одинаково распределенных пар случайных величин (p_i, q_i) , $i \in \mathbb{Z}$, причем $p_0 + q_0 = 1$ и п.н. $p_0 > 0$, $q_0 > 0$. Совокупность $\{(p_i, q_i),\ i \in \mathbb{Z}\}$ называется *случайной средой.* Последовательность целочисленных случайных величин $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}0\}$ называется *случайным блужданием в случайной среде* $\{(p_i, q_i),\ i \in \mathbb{Z}\}$, если $X_0 = 0$ и для произвольных $n \in \mathbb{N}0$, $i \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{\mathbf{P}}(X_{n+1} = i + 1 \mid X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n = i) = p_i$$

и

$$\widehat{\mathbf{P}}(X_{n+1} = i - 1 \mid X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n = i) = q_i,$$

если,конечно, $\widehat{\mathbf{P}}(X_n = i) > 0$ (символ $\widehat{\mathbf{P}}$ означает вероятность, вычисленную при фиксированной случайной среде).

Положим $\varkappa_i = \ln(q_i/p_i)$, $i \in \mathbb{Z}$. *Основное предположение*: случайная величина $\varkappa_0$ принадлежит (без центрирования) области притяжения некоторого устойчивого (и не являющегося односторонним) закона с индексом $\alpha \in (0, 2]$. Случайные величины $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ формируют *сопровождающее случайное блуждание* $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i$, $n \in \mathbb{N}$. Ввиду основного предположения справедлив принцип инвариантности Скорохода: существуют такие положительные нормировочные постоянные C_n , что при $n\infty$

$$\left\{C_n^{-1} S_{\lfloor nt \rfloor}, t \geqslant 0\right\} \stackrel{\mathrm{D}}{\to} W,$$

где $W = \{W(t), t \geqslant 0\}$ – строго устойчивый процесс Леви индекса $\alpha \in (0, 2]$; символ $\stackrel{\mathrm{D}}{\to}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, +\infty)$ с топологией Скорохода.

Введем момент первого достижения уровня $n \in \mathbb{N}$ последовательностью $\{X_n\}$:

$$T_n = \min\{k : X_k = n\}.$$

В работе исследуется случайный процесс $\{T_{\lfloor ns \rfloor}, s \in [0, 1]\}$.

Пусть $L(s, t) = \inf_{u \in [s,t]} W(u)$ при $0 \leqslant s < t$. Положим для $s \in [0, 1)$

$$R^{(s)}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, s); \\ W(t) - L(s, t), & t \in [s, 1]; \\ W(t) - L(s, 1), & t > 1; \end{cases}$$

$$T^{(s)} = \inf\left\{t > 1 : R^{(s)}(t) < 0\right\};$$

$$U^{(s)}(t) = \begin{cases} R^{(s)}(t), & t \in [0, T^{(s)}); \\ 0, & t \geqslant T^{(s)}; \end{cases}$$

$$V(s) = \sup_{t \in [s, +\infty)} U^{(s)}(t);\ V(1) = 0.$$

При $n \in \mathbb{N}$ введем случайный процесс $\{V_n(s),\ s \in [0,1]\}$: $V_n(0) = 0$, а при $s \in (0,1]$

$$V_n(s) = C_n^{-1} \ln T_{\lfloor ns \rfloor}.$$

Пусть символ $\Rightarrow$ означает сходимость случайных процессов в смысле конечномерных распределений.

Теорема. *Если выполнено основное предположение, то при* $n \to \infty$

$$\{V_n(s),\ s \in [0,1]\} \Rightarrow \{V(1-s),\ s \in [0,1]\}.$$

Если, к тому же, процесс Леви W *не имеет положительных скачков, то справедлива сходимость по распределению в пространстве* $D[0,+\infty)$ *с топологией Скорохода.*

Работа выполнена в рамках научной программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления».