ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2,3
2012

О. Ю. Богоявленская (Петрозаводск, ПетрГУ). **Вероятностная модель алгоритма AIMD.**

В работе, представленной данным докладом, проведен анализ дискретного алгоритма Additive Increase Multiplicative Decrease (AIMD) протокола TCP версии NewReno, который является действующим стандартом Интернет. Следуя ряду работ, определим $X(t) \in \mathbb{R}^+$ — объем данных, которые источник может отправить в сеть без получения подтверждения от получателя. Пусть на интервалах $[\theta_n, \theta_{n+1})$, $n = 0, 1, \ldots$, имеет место $X(t) = X(t_0) + bt$ для всех $[t_0, t] \subset [\theta_n, \theta_{n+1})$, где b^{-1} — математическое ожидание времени кругового оборота сегмента данных. В случайные моменты времени $\{\theta_n\}_{n\geqslant 0}$ процесс $\{X(t)\}_{t>0}$ совершает скачок вида $X(\theta_n + 0) = \alpha X(\theta_n)$, где $0 < \alpha < 1$. При этом последовательность $s_n = \int_{\theta_n}^{\theta_{n+1}} X(\tau)\, d\tau$ (объем данных, последовательно доставленных получателю без потерь) образует процесс восстановления, $G(y) = \mathbf{P}\{s_n \leqslant y\}$ — абсолютно непрерывная функция, $\mathbf{E}[s_n] = \lambda^{-1}$, $\lambda > 0$ и $\mathbf{E}[s_n^2] < \infty$.

Определим последовательность $\{X_n = X(\theta_n)\}_{n>0}$, для которой имеет место соотношение $X_{n+1}^2 = \alpha X_n^2 + 2bs_n$. Обозначим $Z_n = X_n^2$, тогда $Z_{n+1} = \alpha^2 Z_n + 2bs_n$.

Теорема 1. *Последовательность $\{Z_n\}_{n>0}$ имеет стационарное распределение, характеристическая функция которого*

$$F(\zeta) = \prod_{k=0}^{\infty} G\big(2b\alpha^{2k}\zeta\big), \tag{1}$$

где $G(\zeta)$ — характеристическая функция $G(y)$.

Пусть $Z(t) = X^2(t)$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Случайный процесс $Z(t)$ имеет стационарное распределение, преобразование Лапласа которого*

$$F(s) = \lambda\Big[\frac{1}{2bs} - G(2bs)\Big] \prod_{k=1}^{\infty} g\big(\alpha^{2k} 2bs\big), \tag{2}$$

где $G(s)$ и $g(s)$ — преобразования Лапласа функций $G(y)$ и $dG(g)$ соответственно.

Выражение (2) позволяет найти все четные моменты стационарного распределения исходного процесса $\{X(t)\}_{t>0}$. Применив стандартные методы поиска оригиналов интегральных преобразований, можно также получить явные выражения для стационарных распределений процессов $\{X(t)\}_{t>0}$ и $\{Z(t)\}_{t>0}$ для известных распределений $G(y)$. В частности, в работе [1] такой оригинал найден для показательной функции распределения $G(y)$ с параметром 1. Заметим, что в этом случае распределения (1) и

(2) совпадают. Математическое ожидание марковской последовательности $\{X_n\}$ можно характеризовать следующим образом:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\,[X_n] = \sqrt{\frac{2b}{1-\alpha^2}}\mathbf{E}\,[\sqrt{s_n}].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dumas V.*, *Guillemin F.*, *Robert P.* A Markovian analysis of AIMD algorithms. — Advances in Applied Probability, 2002, v. 34, № 1, p. 85–111.