ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2,3
2012

Н. А. Манакова, Е. А. Кононова (Челябинск, ЮУрГУ). **О начально-краевой задаче для уравнения Баренблатта–Гильмана.**

Пусть $\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — вещественное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным и оснащенное дуальной парой рефлексивных банаховых пространств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}^*$ так, что имеют место непрерывные и плотные вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{U}^*$. Пусть операторы $L, M \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}^*)$ — s-монотонные и p-коэрцитивные операторы ($p \in [2, +\infty)$) [1].

Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) - u_0 = 0 \tag{1}$$

для уравнения соболевского типа вида

$$\frac{d}{dt}(L(u)) + M(u) = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) может быть представлено в виде

$$N(u)\dot{u} + M(u) = 0,$$

где $N(u) = L'_u$ — производная Фреше нелинейного оператора $L,$ которое является линейным относительно $\dot{u}$, поэтому следуя традиции мы уравнение (2) будем называть квазилинейным уравнением соболевского типа.

Вектор-функцию $u \in C^\infty(-\tau, \tau; \mathfrak{U})$ назовем *решением уравнения* (1), если она удовлетворяет (1). Решение $u = u(t)$ уравнения (1) назовем *решением задачи Коши*, если для некоторого $u_0 \in \mathfrak{U}$ выполнено условие (2).

Теорема 1. *Пусть оператор* $L^{-1} \in C^\infty(\mathfrak{U}^*; \mathfrak{U}),$ *тогда при всех* $\tau \in \mathbb{R}_+,$ $u_0 \in \mathfrak{U}$ *существует единственное решение задачи* (1), (2).

Для любой функции $u \in C^\infty(-\tau, \tau; \mathfrak{U})$ уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$\dot{u} + N^{-1}M(u) = 0.$$

Локальная разрешимость задачи Коши для уравнения (2), есть классический результат [3].

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ –ограниченная область с границей класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times (0, \tau)$, $\tau \in \mathbb{R}_+$ будем искать решения уравнения Баренблатта–Гильмана [2]

$$u_t - \varkappa\tau(\Delta\Phi(u))_t = \varkappa\Delta\Phi(u), \tag{3}$$

удовлетворяющие условию Дирихле на $\partial\Omega \times (0, \tau)$

$$u(x, t) = 0, \qquad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \tau). \tag{4}$$

Уравнение (3) моделирует неравновесную противоточную капиллярную пропитку. Функция $\Phi(u) \equiv |u|^{p-2}u, p \geqslant 2$ — монотонно возрастающая и гладкая. Параметры

© Редакция журнала «ОПиПМ», 2012 г.

$\varkappa$ и τ вещественны. Начальное значение u_0 задачи Коши для уравнения (3) находится из задачи Дирихле для уравнения

$$u_0 - \varkappa\tau\Delta\Phi(u_0) = f. \tag{5}$$

Проведем редукцию задачи (3), (4), (1) к абстрактной задаче (1), (2). Для этого положим $\mathfrak{H} = W_2^{-1}, \mathfrak{U} = L_p$ (все функциональные пространства определены на области Ω). Заметим, что при $p \geqslant \frac{2n}{n+2}$ $\overset{0}{W}{}_2^1 \hookrightarrow L_q$, поэтому $L_p \hookrightarrow W_2^{-1}$. Определим в $\mathfrak{H}$ скалярное произведение формулой

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u\tilde{v}ds\, \forall u, v \in \mathfrak{H}, \tag{6}$$

где $\tilde{v} = (\Delta)^{-1}v$ — обобщенное решение однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа в области Ω . Положим $\mathfrak{U}^* = (L_p)^*$, где $(L_p)^*$ — сопряженное относительно двойственности (6) пространство. Покажем, что $(L_p)^* \supset W_q^{-1}$.

$$|\,\langle u, v\rangle\,| = |\,\langle u, \tilde{v}\rangle\,|_{L_2} \leqslant \|u\|_{W_q^{-1}}\|\tilde{v}\|_{\overset{0}{W}{}_p^1} \leqslant \mathrm{const}\|u\|_{W_q^{-1}}\|v\|_{L_p}.$$

При таком опеределении $\mathfrak{H}^*$ и $\mathfrak{U}^*$ имеют место плотные и непрерывные вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{U}^*$. Операторы L и M определим следующим образом:

$$\langle L(u), y\rangle = \int_\Omega (\lambda u\tilde{v} + |u|^{p-2}uv)ds, \quad u,\, v \in \mathfrak{U};$$

$$\langle M(u), v\rangle = \int_\Omega |u|^{p-2}uvds, \quad u,\, v \in \mathfrak{U}.$$

Лемма. *Операторы* $L, M \in C^1(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}^*)$ s *-монотонны и* p *-коэрцитивны.*

Теорема 2. *Пусть* $p \geqslant \frac{2n}{n+2}$. *Тогда существует единственное решение* $u \in C^\infty(-\tau, \tau; \mathfrak{U}))$ *задачи* (1), (3), (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Свиридюк Г. А.*, *Семенова Н. Н.* Разрешимость неоднородной задачи для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска. – Дифференц. уравнения, 1988, т. 24, №9, с. 1607–1611.
2. *Баренблатт Г. И.*, *Гильман А. А.* Математическая модель неравновесной противоточной капиллярной пропитки. — Успехи матем. наук, 1986, т. 41, в. 4, с. 157.
3. *Ленг С.* Введение в теорию дифференциальных многообразий. М.: Мир, 1967.