

Ф. А. С ан д о м и р с к и й (Москва, ЦЭМИ РАН). **Вариация последовательности апостериорных вероятностей и повторяющиеся игры с неполной информацией со счетным множеством состояний.**

Пусть ρ — вероятностная мера на польском пространстве $\mathcal{K}$, имеющая смысл априорного распределения. Рассмотрим $\mathfrak{F}$ -измеримый случайный элемент $k: \Omega \rightarrow \mathcal{K}$, заданный на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_n\}_{n=0}^\infty, P)$ и имеющий распределение, совпадающее с ρ . На $\mathcal{K}$ возникает последовательность регулярных условных (апостериорных) вероятностей $\rho_n(A) = P(k \in A | \mathfrak{F}_n)$. Мы будем считать, что $\mathfrak{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ (тогда $\rho_0 = \rho$). Через V_N обозначим N -членную вариацию последовательности $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty$

$$V_N(\{\rho_n\}) = \mathbb{E} \sum_{n=0}^{N-1} |\rho_{n+1} - \rho_n|,$$

где $|\Phi|$ обозначает полную вариацию заряда Φ .

Наша цель описать максимально возможную скорость роста $V_N(\{\rho_n\})$ по N при заданном ρ . Эта задача возникает при исследовании повторяющихся игр с неполной информацией. Действительно, пусть $\Gamma_N(\rho)$ повторяющаяся N -шаговая игра с нулевой суммой и неполной информацией у Игрока 2 относительно состояния $k \in \mathcal{K}$, распределенного в соответствии с ρ . Такие игры были введены и изучены R. Aumann'ом, M. Maschler'ом (см. [1]) и их учениками в случае конечного $\mathcal{K}$ и конечных множеств действий игроков. Центральной проблемой в этой области является асимптотическое поведение выигрыша $v_N(\rho)$ информированного Игрока 1 при числе повторений $N \rightarrow \infty$. Мы предполагаем, что $v_N(\rho)$ равен неусредненной сумме выигрышей на каждом шаге. R. Aumann и M. Maschler доказали, что если соответствующая $\Gamma_N(\rho)$ нераскрывающая игра имеет нулевое значение (т.е., единственное преимущество Игрока 1 в $\Gamma_N(\rho)$ — его информированность), то имеют место оценки

$$0 \leq v_N(\rho) \leq C V_N(\{\rho_n\}) \leq C \sqrt{N} \sum_{l \in \mathcal{K}} \sqrt{\rho(l)(1 - \rho(l))}, \quad (*)$$

где C определяется одношаговой игрой, а апостериорное распределение ρ_n на $\mathcal{K}$ порождено первыми n действиями Игрока 1 ($\rho_0 = \rho$). Таким образом, изучение максимальной скорости роста вариации дает оценку сверху на рост выигрыша Игрока 1.

Определим величину $M_N(\rho) = \sup V_N(\{\rho_n\})$, где супремум берется по всевозможным наборам $(\Omega, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_n\}_{n=0}^\infty, P, k)$, таким что распределение k совпадает с ρ . Доскональное изучение асимптотического поведения $M_N(\rho)$ при $N \rightarrow \infty$ в случае двухэлементного множества $\mathcal{K}$ (т.е., наименьшего нетривиального), предпринятое J. Mertens'ом и S. Zamir'ом в [3, 4] и B. De Meyer'ом [2] позволило получить явные формулы для $\lim_{N \rightarrow \infty} M_N(\rho)/\sqrt{N}$ в этом случае и установить, что в степенной шкале для игр с конечным множеством состояний и действий игроков и нулевым значением нераскрывающей игры максимальная скорость роста выигрыша имеет порядок $\sqrt{N}$.

Исследование поведения $M_N(\rho)$ для «больших» множеств $\mathcal{K}$, предпринятое в данной работе, возникло из желания понять сохраняется ли «закон $\sqrt{N}$ » для вариации и значения игры в этом случае. На возможность аномального роста (быстрее $\sqrt{N}$) неявно указывает тот факт, что в случае счетного $\mathcal{K}$ сумма в оценке $(*)$ может разойтись. Мы показываем, что аномальный рост вариации действительно имеет место для распределений с тяжелыми хвостами и конструируем повторяющуюся игру с неполной информацией $\mathfrak{G}_N(\rho)$ со счетным множеством состояний и нулевым значением нераскрывающей игры, для которой из аномального роста $M_N(\rho)$ следует аномальный рост выигрыша Игрока 1.

Разложим априорное распределение на непрерывную и точечную компоненты $\rho = \alpha\rho_c + (1 - \alpha)\rho_p$, где ρ_c — вероятностное распределение без атомов, а ρ_p сосредоточено в не более чем счетном множестве точек. Введем следующее семейство величин, измеряющих «неопределенность» ρ_p :

$$Z_\delta(\rho_p) = \sum_{l: \rho_p(l) > 0} \rho_p(l) \left(\ln \left(\frac{1}{\rho_p(l)} \right) \right)^{\frac{1}{2} - \delta}, \quad \delta < \frac{1}{2}.$$

Отметим, что $Z_{-1/2}(\rho_p)$ совпадает с информационной энтропией Шеннона. Оказывается, что для счетного $\mathcal{K}$ условие $Z_0(\rho) < \infty$ влечет выполнение «закона $\sqrt{N}$ » и является неулучшаемым в шкале $Z_\delta(\rho_p)$. Имеет место следующая теорема, описывающая поведение $M_N(\rho)$:

Теорема. Пусть на польском $\mathcal{K}$ задано априорное распределение $\rho = \alpha\rho_c + (1 - \alpha)\rho_p$, тогда

- $M_N(\rho) = 2N\alpha + (1 - \alpha)M_N(\rho_p)$;
- если $Z_0(\rho_p) < \infty$, то

$$M_N(\rho_p) \leq \sqrt{2N}(Z_0(\rho_p) + \sqrt{\pi/4});$$

- если $Z_\delta(\rho_p) = \infty$ для некоторого $\delta \in (0, 1/2)$, то имеет место аномальный рост $M_N(\rho_p)$:

$$\forall \delta' < \delta \quad \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{M_N(\rho_p)}{N^{\frac{1}{2} + \delta'}} = \infty.$$

В случае счетного $\mathcal{K}$ удастся построить повторяющуюся игру $\mathfrak{G}_N(\rho)$ с нулевой суммой и неполной информацией у Игрока 2 относительно $k \in \mathcal{K}$, имеющую следующие свойства: множества действий игроков счетны; одношаговые функции выигрыша ограничены; для любого ρ игроки имеют ε -оптимальные стратегии в $\mathfrak{G}_N(\rho)$; нераскрывающая игра имеет нулевое значение; если $Z_\delta(\rho) = \infty$ для некоторого $\delta \in (0, 1/2)$, то

$$\forall \delta' < \delta \quad \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{v_N(\rho)}{N^{\frac{1}{2} + \delta'}} = \infty.$$

Таким образом, мы демонстрируем существование игр с аномальным поведением выигрыша, которое является специфическим эффектом, возникающим для больших $\mathcal{K}$ и очень «размазанных» априорных распределений. Отметим, что бесконечность множеств действий игроков в $\mathfrak{G}_N(\rho)$ существенна — в случае конечности обоих множеств можно показать, что скорость роста $v_N(\rho)$ не превышает $n^{\frac{1}{2} + o(1)}$.

Доказательство теоремы основано на комбинации представления для вариации скалярного мартингала, полученного в [2], оценок больших уклонений типа С. Бернштейна и идеи «кодирования» случайных величин последовательностью бернуллиевских из теории информации. На построение игры $\mathfrak{G}_N(\rho)$ нас вдохновили результаты статьи [4].

Работа выполнена при поддержке Лаборатории им. П.Л.Чебышева СПбГУ (грант правительства РФ 11.G34.31.0026) и гранта РФФИ 10-06-00368-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aumann R., Maschler M.* Repeated Games with incomplete information. Cambridge–London: MIT, 1995.
2. *De Meyer B.* The maximal variation of a bounded martingale and the central limit theorem. — Ann. l'Inst. H. Poincare, 1998, v. B34, is. 1, p. 49–59.
3. *Mertens J.-F., Zamir S.* The maximal variation of a bounded martingale. — Israel J. Math., 1977, v. 27, is. 3, p. 252–276.
4. *Mertens J.-F., Zamir S.* The Normal Distribution and Repeated Games . — Internat. J. Game Theory, 1976, v. 4, is. 4, p. 187–197.