ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2,3
2012

М. В. Солдаткина (Москва, МИЭМ). **Оценивание параметров в одной модели случайных подстановок.**

Развиваются результаты работы [6], связанные с анализом параметрической модели случайных подстановок и ее конгруэнтных циклов. Рассматривается множество $S_n = \{s\}$ подстановок n-й степени, т. е. совокупность всех $n!$ взаимно однозначных отображений множества $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ в себя. Для заданного подмножества $A \subset X_n$ A-циклами подстановки $s \in S_n$ называются те ее циклы, длины которых являются элементами A. Если задано некоторое разбиение

$$X_n = \bigcup_{j=1}^{d} A_j, A_j \bigcap A_k = \varnothing, \quad j \neq k, \quad d \geqslant 2, \tag{1}$$

и $C_{A_j}(n) = \sum_{i \in A_j} c_i$ есть число A_j-циклов подстановки s (c_i — число циклов длины i в подстановке, $i = 1, \ldots, n$), $j = 1, \ldots, d$, то для исследования обобщенной цикловой структуры (будем говорить об $A = (A_1, ..., A_d)$-структуре) подстановки s, т. е. вектора

$$C_A(n) = (C_{A_1}(n), C_{A_2}(n), \ldots C_{A_d}(n)), \tag{2}$$

на S_n вводится вероятностная мера вида

$$P_{A\theta}(s) = I\left(\sum_{i=1}^{n} ic_i = n\right) \prod_{j=1}^{d} \theta_j^{C_{A_j}(n)} \Big/ H_{An}(\theta), \theta = (\theta_1, \ldots \theta_d), \quad \theta_\cdot > 0, \tag{3}$$

где $I(\cdot)$ — индикатор и $H_{An}(\theta)$ — необходимый нормирующий множитель, имеющий вид

$$H_{An}(\theta) = n! \mathrm{coef}_{z^n} \exp\left\{\sum_{j=1}^{d} \theta_j \sum_{i \in A_j} \frac{z^i}{i}\right\}. \tag{4}$$

В работе [6] эта конструкция была применена для исследования чисел конгруэнтных циклов в подстановке, т. е. когда подмножества A_j имеют вид

$$A_j = \{k : k = ld + j, \ l \geqslant 0\} \tag{5}$$

для некоторых целых $d \geqslant 2$ и $1 \leqslant j \geqslant d$, и был установлен следующий результат.

Теорема. *Если $n \to \infty$, а θ_1, ..., θ_d — фиксированные параметры, то компоненты вектора* (2) *асимптотически независимы и асимптотически нормальны с параметрами соответственно* $\left(\frac{\theta_j}{d} \ln n, \ \frac{\theta_j}{d} \ln n\right)$, $j = 1, \ldots, d$.

Этот результат позволяет решать и естественные статистические задачи оценивания параметров и проверки гипотез в рамках рассматриваемой модели — тематика, мало исследованная для случайных подстановок.

Настоящий доклад посвящен вопросам оценивания параметров $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_d)$ модели (3)–(5) по наблюдению над вектором A-структуры (2) (вопросы проверки гипотез были рассмотрены в [6]).

Вводятся нормированные статистики

$$\widetilde{C}_{A_j} = \frac{dC_{A_j}}{\ln n}, \quad j = 1, \ldots, d,$$

и для них доказываются следующие утверждаения.

Утверждение 1. *Если $n \to \infty$, то статистика $\widetilde{C}_{A_j}$ является асимптотически несмещенной и асимптотически эффективной оценкой для параметра θ_j, и параметры $\theta_1, \ldots, \theta_d$ оцениваются независимо друг от друга.*

Утверждение 2. *Асимптотический γ-доверительный интервал для параметра θ_j имеет вид $(\widetilde{C}_{A_j} \mp z_\gamma \sqrt{d\widetilde{C}_{A_j}/\ln n})$, где $z_\gamma = \Phi^{-1}(\frac{1+\gamma}{2})$ и $\Phi(z)$ — функция стандартного нормального распределения.*

Аналогичные утверждения доказаны и для параметрических функций $\tau_j(\theta_j)$. Рассмотрен также многовыборочный случай, позволяющий построить более точные оценки параметров модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гончаров В. Л.* Из области комбинаторики. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1944, т. 8, №1, с. 3-48.
2. *Ивченко Г. И.*, *Медведев Ю. И.* Случайные комбинаторные объекты. — Доклады РАН, 2004, т. 396, №2, с. 151–154.
3. *Ивченко Г. И.*, *Медведев Ю. И.* Случайные подстановки: общая параметрическая модель. — Дискретн. матем., 2006, т. 18, №4, с. 105–112.
4. *Ивченко Г. И.*, *Медведев Ю. И.* Статистика параметрической модели случайных подстановок. — Труды по дискретн. матем. Т. 8. 2004, с. 116-127.
5. *Ивченко Г. И.*, *Соболева М. В.* Некоторые неравновероятные модели случайных подстановок. — Дискретн. матем., 2011, т. 23, №3, с. 23-31.
6. *Соболева М. В.* Асимптотическая нормальность чисел конгруэнтных циклов в случайных подстановках. — Дискретн. матем., 2012, т. 24, №1, с. 123-131.
7. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применения. М.: Наука, 1968.