ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2,3
2012

Г. А. Закирова (Челябинск, ЮУрГУ). **К вопросу о вычислении асимптотики L-собственных чисел и регуляризованного L-следа одного возмущенного оператора.**

Зададим операторы $L, T : U \to F$ формулами

$$L = a^2 - \Delta, \quad T = \alpha\Delta - \beta\Delta^2, \qquad \Delta = \frac{d^2}{dx^2},$$

причем

$$F = W_2^k(0,\pi), \qquad k = 0, 1, \ldots, \qquad U = \{W_2^{k+2}(0,\pi) : u(0) = u(\pi) = 0\},$$

$$\operatorname{dom} T = \{u \in W_2^{k+4}(0,\pi) : u''(0) = u''(\pi) = 0\} \bigcap U.$$

Будем использовать следующие обозначения:

$\rho^L(T) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - T)^{-1} \in \mathcal{L}(F;U)\}$ — резольвентное множество оператора T относительно оператора L.

$R_0(\mu) = (\mu L - T)^{-1}$ — L-резольвента оператора T;

$R(\mu) = (\mu L - T - P)^{-1}$ — L-резольвента оператора $T + P$;

$R_0^L(\mu) = (\mu L - T)^{-1}L$ — правая L-резольвента оператора T.

Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} = \sigma^L(T)$ — L-собственные числа оператора T. Очевидна асимптотика L-собственных чисел оператора T: $\mu_n = n^2\beta$.

Пусть P — оператор умножения на функцию $p \in \mathrm{C}^2(0,\pi)$, удовлетворяющую условию: $p'(0) = p'(\pi)$. Пусть также $\|P\| < \frac{\beta}{2}$.

Очевидно, что оператор $T+P$ дискретен. Обозначим через $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty} = \sigma^L(T+P)$, где ν_n занумерованы в порядке невозрастания их дейтвительных частей с учетом алгебраической кратности. Справедливы следующие утверждения:

Теорема 1. *Пусть оператор P таков, что выполнены условия*

1. $p(x) \in \mathbf{C}^2_{[0,\pi]}$;
2. $p'(0) = p'(\pi)$.
3. $\|P\| < \frac{\beta}{2}$.

Тогда справедливо равенство

$$\nu_n = \mu_n + \frac{2}{\pi(a^2 - \lambda_n)} \int_0^\pi p(x)dx + O(n^{-2}).$$

Теорема 2. *Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный набор собственных функций оператора Лапласа, занумерованный по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ с учетом их кратности. Тогда*

$$\lim_{k\to\infty} \Big[\sum_{j=1}^{k} \nu_j - \mu_j - \frac{(P\varphi_j, \varphi_j)}{(a^2 - \lambda_j)}\Big] = 0.$$