ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2,3
2012

А. Е. Гуськов (Череповец, ЧГУ). **Закон больших чисел для случайных процессов с марковской зависимостью переходов в состояниях.**

В [1] рассмотрена модель случайного процесса, переходы в котором образуют цепь Маркова. Пусть $(Z_n^k)_{n=0}^{\infty}$ $(k = 1, 2, \ldots, d)$ — дискретные однородные цепи Маркова с конечными множествами состояний $M_k = \{1, 2, \ldots, m_k\}$, начальными распределениями $Q_k = (q_1^k, q_2^k, \ldots, q_{m_k}^k)$ и матрицами вероятностей переходов $P_k = (p_{ij}^k)_{m_k \times m_k}$, и пусть заданы отображения $f_k\colon \{1, 2, \ldots, m_k\} \to \{1, 2, \ldots, d\}$. Определим случайный процесс $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ с дискретным временем и конечным множеством состояний $E = \{1, 2, \ldots, d\}$. Процесс зададим конструктивно, определив начальное распределение и описав его переходы. Начальное распределение процесса $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ задается матрицей $(X_n)_{n=0}^{\infty}$: $\mathbf{P}\{X_0 = k\} = q_k$, $k = 1, 2, \ldots, d$. Дальнейшие состояния процесса $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ определяются условиями: если $X_n = k$, $\nu_n^k = r$ и $Z_r^k = l$, то $X_{n+1} = f_k(l)$, где $\nu_n^k = \sum_{j=0}^{n-1} I\{X_j = k\}$ есть число посещений процессом $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ состояния k в моменты времени $0, 1, \ldots, n-1$ ($I\{X_j = k\}$ обозначает индикатор события $\{X_j = k\}$).

Теорема. *Пусть все цепи Маркова* $(Z_n^k)_{n=0}^{\infty}$, $k = 1, 2, \ldots, d$, *являются эргодическими и* (p_{kr}^*) *— стационарное (предельное) распределение цепи* $(Z_n^k)_{n=0}^{\infty}$. *Пусть, кроме того, цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей* $\left(\sum_{f_k(r)=l} p_{kr}^*\right)_{k,l=1}^{d}$ *является эргодической и* $(p_k^*)_{k=1}^{d}$ *— ее стационарное (предельное) распределение. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Процесс* $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ *обладает стационарным распределением в следующем смысле: если положить* $q_k = p_k^*$, $q_r^k = p_{kr}^*$, *то* $\mathbf{P}\{X_n = k\} = p_k^*$ *для любого* $n \geqslant 0$.

2. *Распределение из пункта 2 является предельным:* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{X_n = k\} = p_k^*$, *каковы бы ни были матрицы начальных распределений* Q_k, Q.

3. *Пусть* $\nu_n^k = \sum_{j=0}^{n-1} I\{X_j = k\}$ *— число посещений процессом* $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ *состояния* k *в моменты времени* $0, 1, \ldots, n-1$ *и* $\overline{\nu}_n = (\nu_n^1/n, \nu_n^2/n, \ldots, \nu_n^d/n)$ *— вектор частот состояний. Тогда последовательность случайных векторов* $(\overline{\nu}_n)_{n=1}^{\infty}$ *сходится по вероятности к вектору* $(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_k^*)$ *стационарного распределения процесса* $(X_n)_{n=0}^{\infty}$, *т. е. для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \max_{1\leqslant k\leqslant d} \left| \frac{\nu_n^k}{n} - p_k^* \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гуськов А. Е., Толовиков М. И.* Эргодичность случайных процессов, переходы в которых образуют цепи Маркова. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2011, т. 18, в. 3, с. 486.