ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2,3
2012

С. М. Бычкова, **А. А. Жарких** (Мурманск, МГТУ). **Об асимптотической оптимальности решающего правила распознавания направления сдвига точки на плоскости на фоне случайных поворотов.**

Рассматривается движение точки на плоскости. Движение точки осуществляется в дискретном времени. За единицу времени происходит один шаг движения. За этот шаг точка и центр ее вращения смещаются вдоль некоторого направления на величину S с вероятностью p, либо с вероятностью $q = 1-p$ не смещаются. На завершающем этапе шага точка поворачивается относительно указанного центра на случайный угол, равномерно распределенный в полуинтервале $[0, 2\pi)$. Радиус поворота точки на каждом шаге равен R. Таким образом, предполагается, что модель содержит две жестко связанные точки, расстояние между которыми равно R. Обе эти точки как связанный объект смещаются в одном из эквидистантных по углу направлений. При каждом вращении одна из точек является центром (строго одна и та же на каждом шаге). Вторая точка совершает движение по окружности радиуса R относительно этого центра на случайный угол. Координаты только этой второй точки доступны наблюдению. Для описания случайных сдвигов точки используется симметричная модель. Считается, что сдвиг точки осуществляется в одном из m направлений $(m \geqslant 2)$, разделенных углами величины $2\pi/m$. Наблюдателю известны значение m и одно из направлений. В процессе движения точки ее координаты измеряются, записываются и используются для распознавания направления сдвига. Предполагается, что точка двигалась до случайного момента начала наблюдений. Движение точки можно описать следующими формулами:

$$x_k = R\cos\alpha + S\cos\beta_r \sum_{i=1}^{k} \mu_i + R\cos\varphi_k, \quad y_k = R\sin\alpha + S\sin\beta_r \sum_{i=1}^{k} \mu_i + R\sin\varphi_k, \quad (1)$$

где $R = \text{const}$ есть радиус вращения точки относительно центра, α — случайный угол, равномерно распределенный в полуинтервале $[0, 2\pi)$ (показывает возможные положения центра вращения точки, с которой начали наблюдение), μ_i — дискретная случайная величина, которая принимает значение 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью q, $S = \text{const}$ есть величина сдвига, $\beta_r = 2/m$ есть угол, задающий направление истинного сдвига, φ_k — случайный суммарный угол поворота точки за k шагов движения, равномерно распределенный в полуинтервале $[0, 2\pi)$.

Выборочные средние координат наблюдаемой точки (1):

$$\begin{aligned} \widetilde{x}_k &= R\cos\alpha + \frac{R}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos(\varphi_k) + \frac{S}{n}\cos\beta_r\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\mu_k, \\ \widetilde{y}_k &= R\sin\alpha + \frac{R}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(\varphi_k) + \frac{S}{n}\sin\beta_r\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\mu_k. \end{aligned}$$

Далее мы рассматриваем поведение выборочных средних при $n \to \infty$.

© Редакция журнала «ОПиПМ», 2012 г.

Утверждение 1. *Пусть точка совершает движение, которое описывается формулами* (1) . *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *справедливы выражения*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|\widetilde{x}_n - X| \leqslant \varepsilon\} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|\widetilde{y}_n - Y| \leqslant \varepsilon\} = 1,$$

где X *— случайная величина с нормальным законом распределения,*

$$\mathbf{E}(X) = R\cos\alpha + S\cos\beta_r\, p\frac{n+1}{2}, \quad \mathbf{D}(X) = \frac{S^2\cos^2\beta_r}{6n^2}pq(2n^3+3n^2+n) + \frac{R^2}{n},$$

Y *— случайная величина с нормальным законом распределения,*

$$\mathbf{E}(Y) = R\sin\alpha + S\sin\beta_r\, p\frac{n+1}{2}, \quad \mathbf{D}(Y) = \frac{S^2\sin^2\beta_r}{6n^2}pq(2n^3+3n^2+n) + \frac{R^2}{n},$$

r *— номер истинного направления сдвига.*

Обоснование утверждения 1. Остановимся подробнее на $\widetilde{x}_n$. Случайная величина $Z_n = \frac{R}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\varphi_k$ в асимптотике распределена по нормальному закону, $\mathbf{E}\,Z_N = 0$, $\mathbf{D}\,Z_n = R^2/(2n)$. Случайная величина $W_n = \frac{S}{n}\cos\beta_r\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\mu_k$ асимптотике распределена по нормальному закону, $\mathbf{E}(W_N) = S\cos\beta_r p(n+1)/2$, $\mathbf{D}(W_n) = S^2\cos^2\beta_r pq(2n^3+3n^2+n)/(6n^2)$. Таким образом, $\widetilde{x}_n = R\cos\alpha + Z_n + W_n$ в асимптотике распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $\mathbf{E}(X)$ и дисперсией $\mathbf{D}(X)$. Аналогично, $\widetilde{y}_n$ в асимптотике распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $\mathbf{E}(Y)$ и дисперсией $\mathbf{D}(Y)$.

Утверждение 2. *Пусть точка совершает движение, которое описывается формулами* (1) . *Тогда алгоритм распознавания направления сдвига на фоне случайных поворотов реализуется в виде следующего асимптотически оптимального решающего правила:* $L = \arg\min_{0\leqslant t\leqslant m-1}\{\rho_{n,t}\}$, *здесь*

$$\rho_{n,t}^2 = \widetilde{x}_{n,t}^2 + \widetilde{y}_{n,t}^2, \quad \widetilde{x}_{n,t} = x_n - S\cos\beta_t p\frac{n+1}{2}, \quad \widetilde{y}_{n,t} = y_n - S\sin\beta_t p\frac{n+1}{2},$$

L *— номер направления, в пользу которого принимается решение.*

Обоснование утверждения 2. Пара статистик $(\widetilde{x}_{n,r}, \widetilde{y}_{n,r})$ (если r — истинное направление), соответствующих истинному направлению движения, асимптотически стремится к $(R\cos\alpha, R\sin\alpha)$. Пары статистик $(\widetilde{x}_{n,t}, \widetilde{y}_{n,t})$, не соответствующих истинному направлению, в асимптотике зависят линейно от $n+1$. Таким образом, $\rho_{n,t}$ достигает минимума на истинном направлении переноса $L = r$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жарких А. А., Бычкова С. М.* Распознавание направления случайного переноса точки на фоне случайных поворотов. — Вестник МГТУ. Труды МГТУ, 2010, т. 13, № 4/2, с. 1039–1043.
2. *Жарких А. А., Бычкова С. М.* Вероятности распознавания направления переноса в одной модели случайного движения точки на плоскости. — Сборник докладов 8-й Международной конференции «Интеллектуализация обработки информации». М.: 2010, с. 346–349.
3. *Жарких А. А., Бычкова С. М.* Точные формулы для вычисления вероятностей распознавания направления переноса точки на плоскости на фоне случайных поворотов. — Труды IX-й Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'12. М.: 2012, с. 1130–1139.
4. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989, 574 с.
5. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986, 432 с.