ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2,3
2012

А. Ю. Голубин, **В. Н. Гридин** (Одинцово, ЦИТП РАН). **Оптимизация страхования индивидуальных рисков и перестрахования суммарного ущерба.**

Доклад посвящен решению задачи оптимального управления риском в статической модели страхования. Новизна постановки задачи заключается в том, что разрешен выбор как стратегии страхования риска отдельного клиента, так и стратегии перестрахования суммарного риска. Интересы клиентов и перестраховщика учтены введением дополнительных ограничений с вероятностью единица на их остаточные риски. Оптимальным с точки зрения полезности страховщика оказывается stop loss перестрахование с верхним пределом и страхование, представляющее собой комбинацию stop-loss стратегии и франшизы.

1. *Описание модели* Рассматривается модель страхового рынка, состоящего из страховщика, перестраховщика и n клиентов $(n \geqslant 2)$. Потенциальные ущербы (риски) клиентов – н.о.р. случайные величины $X_j,\, j = 1, \ldots, n$, определенные на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, с распределением $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} P\{X_j \leqslant x\}$. Через $T = \sup\{supp\, F\} \leqslant \infty$ будем обозначать верхнюю грань носителя распределения F. Страховщик выбирает функцию дележа страхования $I(x)$ и функцию дележа перестрахования $A(x)$ из класса борелевских функций на $[0, \infty)$, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant I(x) \leqslant x$ и $0 \leqslant A(x) \leqslant x$, которые означают, что возмещение не может быть отрицательным и не может превосходить величины ущерба. Случайная величина $I(X_j)$ есть возмещаемая j-му клиенту часть ущерба, $A(\sum_{j=1}^n I(X_j))$ — доля, оплачиваемая страховщиком после перестрахования его суммарного риска $X^I = \sum_{j=1}^n I(X_j)$. Остаток $X^I - A(X^I)$ возмещается перестраховщиком.

Наложим дополнительные ограничения на дележи (I, A), которые отражали бы желание других участников рынка — страхователей и перестраховщика — защититься от больших потерь, т.е. ввести ограничения сверху на максимальные возможные значения их рисков

(i) остаточный риск клиента после страхования $X_1 - I(X_1) \leqslant q$,

(ii) риск перестраховщика $X^I - A(X^I) \leqslant Q$.

Здесь q и Q — заданные положительные константы, неравенства понимаются выполненными с вероятностью единица (п.н.). Легко видеть, что эти ограничения можно эквивалентно переписать в форме ограничений снизу на функции дележа страхования и перестрахования: $I(x) \geqslant x - q$ и $A(x) \geqslant x - Q$ для $x \in [0, \infty)$.

Премия P, полученная от клиента, и премия P_1 от страховщика за перестрахование определяются по формуле среднего значения, широко используемой в актуарной литературе [1]: $P = (1 + \alpha) E\, I(X_1)$ и $P_1 = (1 + \alpha_1) E\, [X^I - A(X^I)]$. Здесь суммарный риск страховщика (до перестрахования) $X^I = \sum_{j=1}^n I(X_j)$, а α и α_1 — заданные коэффициенты нагрузки, соответственно, страховщика и перестраховщика, удовлетворяющие стандартным неравенствам $0 < \alpha < \alpha_1$.

Объектом изучения в данной работе является задача выбора страховщиком оптимальных дележей страхования и перестрахования, где целевым функционалом выступает ожидаемая полезность финального капитала страховщика

$$J[I,A] \stackrel{\text{def}}{=} E\,u\Big(nP - P_1 - A\Big(\sum_{j=1}^{n} I(X_j)\Big)\Big), \tag{1}$$

где $u(x)$ — заданная дважды дифференцируемая вогнутая функция полезности: $u' > 0$ и $u'' < 0$ (см., например, [2]). С учетом ограничений, введенных на допустимые дележи, эта задача имеет вид

$$\max_{I,A} J[I,A] \text{ при ограничениях } (x-q)_+ \leqslant I(x) \leqslant x \text{ и } (x-Q)_+ \leqslant A(x) \leqslant x, \tag{2}$$

где мы обозначили через $(y)_+ = \max\{0, y\}$.

2. *Основной результат*

Теорема 1. *Оптимальные дележи* (I^*, A^*) *в задаче* (2) *имеют следующий вид: комбинация stop loss страхования и франшизы* $I^*(x) = (x \wedge k^*) \vee (x-q)$, *stop loss перестрахование с верхним пределом* $A^*(x) = (x \wedge a^*) \vee (x-Q)$. *Уровни* $k^* = k^0 \wedge T$ *и* $a^* = a^0 \wedge nT$ *удовлетворяют неравенству* $0 < k^* < a^*$, *параметры* k^0 *и* a^0 *являются решением пары уравнений* $\psi_1(k,a) = 0$ *и* $\psi_2(k,a) = 0$, *в которых*

$$\psi_1(k,a) \stackrel{\text{def}}{=} (1+\alpha)E\,u'(P_{k,a} - A_a(X_k^I)) - E\,\Big[u'(P_{k,a} - A_a(X_k^I))|X_1 = k\Big], \tag{3}$$

$$\psi_2(k,a) \stackrel{\text{def}}{=} (1+\alpha_1)E\,u'(P_{k,a} - A_a(X_k^I)) - u'(P_{k,a} - a), \tag{4}$$

где обозначены
$P_{k,a} = (1+\alpha_1)E\,A_a(X_k^I) - n(\alpha_1 - \alpha)E\,I_k(X_1)$, $A_a(x) = (x \wedge a) \vee (x-Q)$,
$I_k(x) = (x \wedge k) \vee (x-q)$, *и* $X_k^I = \sum\limits_{j=1}^{n} I_k(X_j)$.

Найденные в теореме 1 стратегии I^* и A^* применяются, соответственно к каждому индивидуальному риску X_j, $j = 1, \ldots, n$, и к суммарному ущербу $X^* = \sum_{j=1}^{n} I^*(X_j)$, погасить который обязался перед клиентами страховщик. В этом принципиальное отличие от модели с выбором индивидуального страхования и индивидуального перестрахования в [3], где, как и здесь, риск, принятый страховщиком от клиента есть с. в. $I^*(X_j)$, но суммарная доля страховщика после перестрахования равна $\sum_{j=1}^{n} A^*(I^*(X_j))$, в то время как в нашем случае это $A^*(\sum_{j=1}^{n} I^*(X_j))$.

Представляется интересным сравнить оптимальные дележи в случае индивидуального перестрахования, где финальный капитал страховщика $nP - nP^1 - \sum_{j=1}^{n} A(I(X_j))$ с премией перестраховщику $P^1 = (1+\alpha_1)E[I(X_1) - A(I(X_1))]$, и в нашем случае суммарного перестрахования, где финальный капитал $nP - P_1 - A(\sum_{j=1}^{n} I(X_j))$. Для простоты рассмотрим модели без дополнительных ограничений, формально положив $q = Q = \infty$. Как было показано в [3], оптимальными дележами в первом случае будут stop loss стратегии $I^*(x) = x \wedge k^*$ и $A^*(x) = x \wedge a^*$ причем, в силу неравенства $\alpha < \alpha_1$, всегда выполнено $k^* \leqslant a^*$. Это означает, что риск страховщика после перестрахования $A^*(I^*(X_1)) = I^*(X_1)$ п. н. — перестрахование не востребовано. Однако, в случае перестрахования суммарного риска, такой отказ от перестрахования необязательно имеет место. Следующее ниже предложение устанавливает, что суммарное перестрахование выгодно, когда разница между коэффициентами нагрузки страховщика и перестраховщика, где $\alpha < \alpha_1$, «не слишком большая», т. е. когда перестрахование «не слишком» дорого.

Предложение. *Для задачи* $\max_{I,A} J[I,A]$ *без дополнительных ограничений в невырожденном случае, когда* $k^* < T$, *существует значение* $\alpha' > \alpha$ *такое, что для любого* $\alpha_1 \in [\alpha, \alpha')$ *неравенство* $nk^* > a^*$ *выполняется.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Дж.* Актуарная математика. М.: Янус-К, 2001.
2. *Golubin A. Y.* Pareto-optimal Insurance Policies in the Models with a Premium Based on the Actuarial Value. — J. Risk and Insurance, 2006, v. 73, № 3, p. 469–487.
3. *Голубин А. Ю., Гридин В. Н., Газов А. И.* Оптимизация дележа риска в статической модели с перестрахованием. — Автомат. и телемех., 2009, т. 70, в. 8, с. 133–144.