ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2,3
2012

Д. А. Шабанов (Москва, МГУ). **Метод случайной перекраски в экстремальной задаче о раскрасках простых гиперграфов с ограниченными степенями вершин.**

В работе, представленной данным докладом, рассматривается известная проблема экстремальной комбинаторики о раскрасках простых гиперграфов.

Напомним ряд определений. *Гиперграфом* называется пара множеств $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ — некоторое конечное множество, называемое *множеством вершин* гиперграфа H, а $E = E(H)$ — некоторая совокупность подмножеств множества V, называемых *ребрами* гиперграфа. *Степенью вершины* в гиперграфе называется количество ребер, содержащих эту вершину. Максимальную степень вершины в гиперграфе H мы будем обозначать $\Delta(H)$. Раскраска множеств вершин гиперграфа называется *правильной*, если в ней нет одноцветных ребер. *Хроматическим числом* гиперграфа называется минимальное число цветов, требуемое для правильной раскраски множеств его вершин. Хроматическое число гиперграфа H будем обозначать $\chi(H)$. Наконец, гиперграф называется n*-однородным*, если каждое его ребро содержит ровно n вершин.

В классической работе П. Эрдеша и Л. Ловаса [1] с помощью знаменитой вероятностной Локальной леммы была доказана следующая теорема о количественной связи между хроматическим числом и максимальной степенью вершины в однородном гиперграфе.

Теорема [П. Эрдеш, Л. Ловас]. *Пусть $n \geqslant 3$ и $r \geqslant 2$ — натуральные числа, а H — n-однородный гиперграф с условием*

$$\Delta(H) \leqslant r^{n-1}/(4n). \tag{1}$$

Тогда $\chi(H) \leqslant r$.

Улучшению этой теоремы (т. е. ослаблению условия (1) на $\Delta(H)$) посвящены работы таких известных математиков, как Й. Бек, Дж. Радхакришнан и А. Сринивасан, А. В. Косточка, В. Рёдль и др. (см., например, обзорную работу [2]).

В докладе представлены результаты исследования задачи типа Эрдеша–Ловаса для класса простых гиперграфов. Напомним, что гиперграф называется *простым*, если каждые любые два его различных ребра имеют не более одной общей вершины. Впервые такая проблема была поставлена в работе З. Сабо [3] и затем изучалась А. В. Косточкой, А. Фризом, Д. Мубаи и др. (подробнее см. [2]). Первый результат работы сформулирован в теореме 1.

Теорема 1. *Существует такое натуральное число n_0, что для всех $n > n_0$, всех $r \geqslant 2$, удовлетворяющих соотношению $r \leqslant n^{1/9}$, и произвольного n-однородного простого гиперграфа H с условием*

$$\Delta(H) \leqslant r^{n-1} n^{-3/t}, \quad t = t(n,r) = \left\lfloor \sqrt{\min\left\{\frac{\ln n}{\ln r}, \frac{\ln n}{2\ln((4/3)\ln n)}\right\}} \right\rfloor, \tag{2}$$

выполнено $\chi(H) \leqslant r$.

Данная теорема улучшает результат Сабо из работы [3]. Тем не менее, из выражения в правой части (2) видно, что теорема 1 является нетривиальной по отношению к теореме Эрдеша–Ловаса только при малых значениях r по отношению к n . Этот недостаток исправляет теорема 2.

Теорема 2. *Пусть* $n \geqslant 3$, $r \geqslant 3$ *— натуральные числа, а* H *—* n *-однородный простой гиперграф с условием* $\Delta(H) \leqslant (1/28)\, r^{n-1} n^{-1/3}$. *Тогда* $\chi(H) \leqslant r$.

Доказательства теорем 1 и 2 основаны на использовании метода случайной перекраски вершин гиперграфа, суть которого состоит в том, чтобы сначала рассмотреть случайную равномерную раскраску вершин в r цветов, а потом организовать случайный процесс ее «исправления». Нами предложен параметрический случайный процесс перекраски вершин гиперграфа, анализ которого при разных значениях параметров позволяет получить утверждения теорем 1 и 2.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №12-01-00683а), Программы поддержки ведущих научных школ (грант №НШ-2519.2012.1) и гранта Президента РФ МК-1122.2012.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Erdős P.*, *Lovász L.* Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. — In: Infinite and Finite Sets, Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 1973, v. 10, p. 609–627.
2. *Райгородский А. М.*, *Шабанов Д. А.* Задача Эрдеша–Хайнала о раскрасках гиперграфов, ее обобщения и смежные проблемы. — Успехи матем. наук, 2011, т. 66, № 5, с. 109–182.
3. *Szabó Z.* An application of Lovasz Local Lemma — a new lower bound for the van der Waerden number. — Random Structures and Algorithms, 1990, v. 1, № 3, p. 343–360.