

М. Е. Жуковский (Москва, МГУ). **Законы нуля или единицы для случайных графов.**

В работе, представленной данным докладом, рассматриваются законы нуля или единицы для свойств первого порядка случайного графа Эрдеша–Реньи $G(N, p)$.

Напомним ряд определений. Пусть $N \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$, $V = \{1, 2, \dots, N\}$, Ω_N — множество неориентированных графов без петель и кратных ребер на множестве вершин V . Случайным графом $G(N, p)$ называется случайный элемент со значениями во множестве Ω_N и распределением $P_{N,p}$ на множестве всех подмножеств в Ω_N , где $P_{N,p}(G) = p^{e(G)}(1-p)^{C_N^2 - e(G)}$, $e(G)$ — количество ребер в графе G . Обозначим $\mathcal{L}$ класс свойств графов первого порядка. Обозначим, кроме того, $\{G \models L\}_N$ множество графов из Ω_N , удовлетворяющих свойству $L \in \mathcal{L}$. Говорят, что случайный граф $G(N, p)$ подчиняется закону нуля или единицы, если для любого свойства $L \in \mathcal{L}$ справедливо одно из следующих равенств:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N,p}(\{G \models L\}_N) = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} P_{N,p}(\{G \models L\}_N) = 1. \quad (1)$$

В 1969 году Ю. В. Глебским, Д. И. Коганом, М. И. Лиогоньким и В. А. Талановым [1] и независимо в 1976 году Р. Фагиным [2] было доказано, что для любого $p \in [0, 1]$ случайный граф $G(N, p)$ подчиняется закону нуля или единицы. Доказательство этого утверждения проходит и для случая $p = p(N)$, если функция p изменяется медленнее, чем любая степенная. Иными словами, справедливо следующее утверждение.

Теорема [1, 2]. Пусть $\min\{p, 1-p\}N^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ для любого $\alpha > 0$. Тогда случайный граф $G(N, p)$ подчиняется закону нуля или единицы.

В 1988 году Дж. Спенсер и С. Шела [3] улучшили этот результат, рассмотрев степенные функции $p = N^{-\alpha}$ для $\alpha \in (0, 1]$.

Теорема [3]. Пусть $p = N^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1]$. Если $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, то случайный граф $G(N, p)$ подчиняется закону нуля или единицы. Если же $\alpha \in \mathbb{Q}$, то случайный граф $G(N, p)$ не подчиняется закону нуля или единицы.

В работе, представленной данным сообщением, исследуется закон нуля или единицы для свойств первого порядка с ограниченной числом $j \in \mathbb{N}$ кванторной глубиной. Итак, пусть $\mathcal{L}_j$ — класс свойств графов первого порядка, которые записываются с помощью формул с ограниченной числом j кванторной глубиной. Такие свойства в контексте законов нуля или единицы для графа $G(N, p)$ были впервые рассмотрены М. МакАртур в 1997 году [4]. В ее работе изучались формулы, в записи которых может участвовать бесконечно много конъюнкций и дизъюнкций. Мы рассмотрели более сложную ситуацию, когда количество дизъюнкций и конъюнкций конечно.

Будем говорить, что случайный граф $G(N, p)$ подчиняется j -закону нуля или единицы, если для любого свойства $L \in \mathcal{L}_j$ справедливо одно из двух равенств в (1). Сформулируем доказанный нами результат.

Теорема 1. Пусть $j \geq 3$, $p = N^{-\alpha}$. Если $\alpha \in [0, 1/j - 2)$, то случайный граф $G(N, p)$ подчиняется j -закону нуля или единицы. Если же $\alpha = 1/(j - 2)$, то случайный граф $G(N, p)$ не подчиняется закону нуля или единицы. При $j = 2$, $p = N^{-\alpha}$ случайный граф $G(N, p)$ подчиняется j -закону нуля или единицы для всех $\alpha \in [0, 1]$.

Кроме того, нам удалось ответить на вопрос, существует ли предел при $N \rightarrow \infty$ у вероятности $P_{N, N^{-1/(j-2)}}(G \models L)$ для $L \in \mathcal{L}_j$.

Теорема 2. Пусть $j \geq 3$. Тогда для любого $L \in \mathcal{L}_j$ существует $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N, p}(\{G \models L\}_N)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-00683.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глебский Ю. В., Коган Д. И., Лиогонький М. И., Таланов В. А. Объем и доля выполнимости формул узкого исчисления предикатов. — Кибернетика, 1969, № 2, с. 17-26.
2. Fagin R. Probabilities in finite models. — J. Symbolic Logic, 1976, v. 41, p. 50-58.
3. Shelah S., Spencer J. H. Zero-one laws for sparse random graphs. — J. Amer. Math. Soc., 1988, № 1, p. 97-115.
4. McArtur M. The asymptotic behavior of $L_{\infty, \omega}^k$ on sparse random graphs. — Logic and Random Structures, 1997, v. 33, p. 53-63.