ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2,3
2012

А. С. Т и х о м и р о в (Великий Новгород, НовГУ)**. О переходных функциях оптимального марковского поиска.**

Возьмем евклидово пространство $\mathbf{R}^d$ с какой-либо обычной метрикой ρ. Замкнутый шар радиуса r с центром в точке x обозначим $B_r(x) = \{y \in \mathbf{R}^d :\ \rho(x,y) \leqslant r\}$.

Пусть целевая функция $f:\ \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ ограниченна снизу и измерима. Рассмотрим задачу оценки минимального значения целевой функции f с заданной точностью ε (аппроксимация «по функции»). Один из способов решения этой задачи состоит в применении марковских алгоритмов случайного поиска. Следуя [1, с. 116], приведем общую схему моделирования k шагов марковского случайного поиска $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k$.

Алгоритм

Шаг 1. $\xi_0 \leftarrow \pi(\cdot)$; $n \leftarrow 1$.

Шаг 2. $\eta_n \leftarrow P_n(\xi_{n-1}, \cdot)$.

Шаг 3. $\xi_n \leftarrow \begin{cases} \eta_n, & \text{с вероятностью } G_n, \\ \xi_{n-1}, & \text{с вероятностью } 1 - G_n, \end{cases}$

где $G_n = G_n(\eta_n, \xi_{n-1}, f(\eta_n), f(\xi_{n-1}))$.

Шаг 4. Если $n < k$, то $n \leftarrow n+1$ и перейти к шагу 2, иначе STOP.

Здесь $\pi(\cdot)$ — начальное распределение. Обозначение « $\eta_n \leftarrow P_n(\xi_{n-1}, \cdot)$ » читается как «получить реализацию случайной величины η_n с распределением $P_n(\xi_{n-1}, \cdot)$ ». Различные правила задания вероятностей G_n и переходных функций P_n приводят к различным вариантам марковских алгоритмов случайного поиска.

Нас интересует попадание поиска в множество $A_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}^d :\ f(x) \leqslant \inf f + \varepsilon\}$. Введем величины $\xi_n^* = \arg\min\{f(\xi_0), f(\xi_1), \ldots, f(\xi_n)\}$. Случайная величина ξ_n^*, попав в множество A_ε, из него больше не выйдет.

Мы рассмотрим одну характеристику скорости сходимости случайного поиска. *Гарантирующее число шагов* случайного поиска $N(f, A_\varepsilon, \gamma)$ определяется как такое минимальное число шагов поиска, при котором достижение множества A_ε гарантировано с вероятностью большей, чем γ. Иначе говоря, $N(f, A_\varepsilon, \gamma) = \min\{n \geqslant 0 :\ \mathbf{P}\{\xi_n^* \in A_\varepsilon\} > \gamma\}$.

Будем рассматривать марковский случайный поиск, переходные функции P_n которого обладают *симметричными* плотностями $p_n(x,y) = g_n(\rho(x,y))$, где ρ — метрика, а g_n — невозрастающие неотрицательные функции. Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех переходных функций с симметричными плотностями такого вида. Простейшим из таких распределений является равномерное распределение $U_a(x, \cdot)$ в шаре $B_a(x)$ радиуса $a > 0$ с центром в точке x. Положим $\mathcal{U} = \{U_a :\ a > 0\}$. Ясно, что $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}$.

Оказалось, что можно сузить семейство используемых переходных функций, не теряя свойства оптимальности в смысле минимальности числа шагов поиска, при котором достижение множества A_ε гарантировано с заданной надежностью.

Теорема. *Пусть целевая функция* f, $\varepsilon > 0$, $\gamma \in (0,1)$, *начальное распределение* π *и вероятности* G_n *фиксированы. Тогда* $\min\{N(f, A_\varepsilon, \gamma) :\ P_n \in \mathcal{P}\} = \min\{N(f, A_\varepsilon, \gamma) :\ Q_n \in \mathcal{U}\}$.

Таким образом, доказано, что переходные функции оптимального марковского случайного поиска (т. е. поиска с минимальным значением гарантирующего числа шагов) имеют простую структуру. Чтобы найти оптимальные переходные функции, нам достаточно найти набор чисел (радиусы шаров равномерных распределений из множества $\mathcal{U}$).

Полученный теоретический результат имеет ясное прикладное значение, так как обосновывает выбор вида поиска, рекомендованного в ряде работ (как правило, прежнее обоснование было либо эмпирическим, либо основывалось на соображениях «простоты»).

Результаты работы, представленной данным докладом, обобщают результаты статьи [2], полученные для монотонного марковского поиска, на весь класс марковских алгоритмов случайного поиска экстремума (в том числе на знаменитый алгоритм simulated annealing).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zhigljavsky A.*, *Žilinskas A.* Stochastic Global Optimization. Berlin: Springer, 2008.
2. *Тихомиров А. С.* Об оптимальном марковском монотонном симметричном случайном поиске. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1998, т. 38, № 12, с. 1973–1982.