О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 19 **М А Т Е М А Т И К И** **В ы п у с к 2,3**
2012

А. Б. К у п а в с к и й (Москва, МГУ). **Дистанционные графы с большим обхватом и большим хроматическим числом.**

В работе, представленной настоящим докладом, мы рассматриваем проблему, которая связана с двумя известными задачами теории графов и комбинаторной геометрии.

Первая из них — это нахождение хроматического числа пространства (см. обзор [1]). В 1950 году Нелсон задал следующий вопрос: сколько цветов нужно, чтобы покрасить точки плоскости так, чтобы точки на единичном расстоянии были покрашены в разные цвета? Минимальное необходимое число $\chi(\mathbb{R}^2)$ цветов называется *хроматическим числом плоскости.* Аналогичный вопрос можно задать и в бóльших размерностях. Вопрос оказался трудным, и даже в случае плоскости точный ответ неизвестен, имеются лишь оценки $4 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7$. Следующие асимптотические оценки были получены Райгородским и Ларманом и Роджерсом соответственно:

$$(\zeta_{\rm low} + o\,(1))^n \leqslant \chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + o\,(1))^n, \quad \text{где } \zeta_{\rm low} = 1,239\ldots$$

Мы будем изучать графы, естественным образом возникающие при иследовании хроматического числа пространства. Граф $G = (V, E)$ называют *дистанционным в* $\mathbb{R}^n$, если V — подмножество $\mathbb{R}^n$, а

$$E \subseteq \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}\colon\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,\ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 1\}.$$

Несложно понять, что для любого дистанционного графа G имеем $\chi(G) \leqslant \chi(\mathbb{R}^n)$, где $\chi(G)$ — обычное хроматическое число графа. С другой стороны, Эрдеш и Де Бройн с помощью соображений компактности показали, что $\chi(G) = \chi(\mathbb{R}^n)$, где G — некоторый конечный дистанционный граф в $\mathbb{R}^n$.

Вторая задача, которая лежит в основе этой работы, звучит так: можно ли для любых фиксированных $k, l \in \mathbb{N}$ построить графы с хроматическим числом, бóльшим k, и обхватом (длиной кратчайшего цикла), бóльшим l? Положительный ответ на этот вопрос был дан Эрдешем в 1959 году (см. [2]) с помощью вероятностных методов. Через 9 лет Ловас смог привести явную конструкцию таких графов.

Естественно спросить, а бывают ли дистанционные графы с большим хроматическим числом и большим обхватом (или с маленьким кликовым числом, т. е. без полного подграфа фиксированного размера)? В 1975 Эрдеш спросил, существуют ли дистанционные графы на плоскости без треугольников (который является одновременно кликой размера три и циклом длины три) и с хроматическим числом 4. На вопрос был дан положительный ответ, более того, позже было доказано [3], что для любого фиксированного l существует дистанционный граф G, у которого $\chi(G) = 4$ и обхват больше l.

Мы рассмотрим следующие три семейства дистанционных графов в $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{C}(n, k)$ — семейство всех дистанционных графов, которые не содержат полных подграфов размера k; $\mathcal{G}_{\rm odd}(n, k)$ — семейство всех дистанционных графов, которые не содержат нечетных циклов длины $\leqslant k$; $\mathcal{G}(n,k)$ — семейство всех дистанционных графов, которые не содержат циклов длины $\leqslant k$. Понятно, что имеет место следующее включение:

$$\mathcal{G}(n,l) \subset \mathcal{G}_{\mathrm{odd}}(n,l) \subset \mathcal{C}(n,k) \subset \mathcal{C}(n,k'), \quad l \geqslant 3, \quad k' \geqslant k \geqslant 3.$$

Теперь определим следующие величины:

$$\zeta_k = \lim_{n\to\infty} \inf \max_{G\in\mathcal{C}(n,k)} (\chi(G))^{1/n}, \ \xi_k^{\mathrm{odd}} = \lim_{n\to\infty} \inf \max_{G\in\mathcal{G}_{\mathrm{odd}}(n,k)} (\chi(G))^{1/n},$$

$$\xi_k = \lim_{n\to\infty} \inf \max_{G\in\mathcal{G}(n,k)} (\chi(G))^{1/n}.$$

Из вида оценок хроматического числа пространства понятно, что рассматривать данные величины осмысленно (в частности, что все они не превосходят трех). Величины ζ_k и ξ_k^{odd} изучались в нескольких статьях. Самые точные оценки на ζ_k принадлежат А. Купавскому [4] (см. также [5], где исследовались и ξ_k^{odd}, и ζ_k).

Есть два подхода к получению оценок величины ζ_k. Первый подход вероятностный, и, соответственно, он не дает явной конструкции графа. Однако с его помощью можно доказать, что $\zeta_k \geqslant c_k$, где $c_k > 1$ и $\lim_{k\to\infty} c_k = \zeta_{\mathrm{low}}$.

Второй подход теоретико-кодовый. Он дает явные конструкции графов, однако в пределе по k работает значительно хуже.

Единственный известный способ получить оценки на ξ_k^{odd}, $k \geqslant 5$, также теоретико-кодовый. В работе [5] было показано, что для любого фиксированного k имеем $\xi_k^{\mathrm{odd}} > 1$.

Однако и вероятностный, и теоретико-кодовый подход из предыдущих работ не позволяли получить нетривиальную оценку величины ξ_k, $k \geqslant 4$. Основной результат доклада — следующее утверждение.

Теорема 1. *Для каждого фиксированного* $k \geqslant 3$ *имеем* $\xi_k \geqslant 1+\delta$, *где* $\delta = \delta(k)$ *есть положительная константа, зависящая только от* k.

Доказательство этой теоремы основано на анализе свойств случайного подграфа дистанционного графа следующего вида: $G_{4n} = (V_{4n}, E_{4n})$, где

$$V_{4n} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{4n})\colon \ x_i \in \{0,1\}, \ x_1 + x_2 + \cdots + x_{4n} = 2n\},$$

$$E_{4n} = \{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}\colon \ (\mathbf{x},\mathbf{y}) = n\}.$$

Здесь $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение.

Основные ингредиенты доказательства — локальная лемма Ловаса, примененная в несимметричной форме, и следующаая ниже теорема из работы Франкла и Редля [6].

Теорема 2. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что для любого подмножества* S *множества* V_{4n}, *где* $|S| \geqslant (2-\delta)^{4n}$, *число ребер в* S (*мощность* $E_{4n}|_S$) *больше, чем* $(4-\varepsilon)^{4n}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09-01-00294.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Райгородский А. М.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств. — Успехи матем. наук, 2001, т. 56, № 1, с. 107-146.
2. *Erdős P.* Graph theory and probability. — Canad. J. Math., 1959, № 11, p. 34–38.
3. *O'Donnell P.* Arbitrary girth, 4-chromatic unit distance graphs in the plane I. Graph embedding. — Geombinatorics, 2000, № 9, p. 180–193.
4. *Купавский А.* Явные и вероятностные конструкции дистанционных графов с маленьким кликовым и большим хроматическим числами. — Изв. РАН, в печати.

5. *Демехин Е.*, *Райгородский А. М.*, *Рубанов О. И.* Дистанционные графы, имеющие большое хроматическое число и не содержащие клик или циклов заданного размера. — Матем. сб., в печати.
6. *Frankl P*, *Rödl V.* Forbidden intersections. — Trans. of Amer. Math. Soc., 1987, v. 300, № 1, p. 259–286.