ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2012

**Ю. Б. Буркатовская, С. Э. Воробейчиков, Е. Е. Сергеева** (Томск, ТПУ, ТГУ). **Гарантированное оценивание параметров порогового процесса с условной неоднородностью.**

Пороговые процессы широко используются в качестве моделей временных рядов, в которых параметры процесса зависят от знака предшествующего наблюдения. В частности, они применяются для описания волатильности, поскольку поведение цены акции существенно зависит от того, упала или выросла цена в последний день.

Рассматривается случайный процесс TGARCH $(p,q)$ $(x_k)$ следующего вида:

$$x_k = \sigma_k\varepsilon_k, \quad \sigma_k = a + \sum_{i=1}^{p}(\alpha_i^+ x_{k-i}^+ - \alpha_i^- x_{k-i}^-) + \sum_{i=1}^{q}\beta_i\sigma_{k-i},$$

где $\{\varepsilon_k\}$ $(k \geqslant 1)$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $\mathbf{M}\varepsilon_k = 0$, $\mathbf{M}|\varepsilon_k| = 1$, $x_{k-i}^+ = \max\{0, x_{k-i}\}$, $x_{k-i}^- = \min\{0, x_{k-i}\}$. Все параметры неотрицательны, параметры $\{\beta_i\}_{1\leqslant i\leqslant q}$ предполагаются известными, причем $\sum_{i=1}^q \beta_i < 1$. Ставится задача по наблюдениям за процессом $x_k$ оценить вектор неизвестных параметров $\Lambda = [a, \alpha_1^+, \alpha_1^-, \ldots, \alpha_p^+, \alpha_p^-]$.

Аппроксимируем модель авторегрессионным процессом вида

$$y_k = \Lambda U_k + b_k\xi_k,$$
$$U_k = [F_0(k,\beta,x)/m_k, \ldots, F_{2p}(k,\beta,x)/m_k], \quad m_k = \max\{F_0(k,\beta,x), \ldots, F_{2p}(k,\beta,x)\},$$
$$y_k = |x_k|/m_k, \quad b_k = B\Lambda U_k, \quad B^2 = M\,(|\varepsilon_k|-1)^2, \quad \xi_k = (|\varepsilon_k|-1)/B.$$

Функции $F_i(k,\beta,x)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$F_0(k,\beta,x) = 1 + \sum_{i=1}^{q}\beta_i F_0(k-i,\beta,x),$$
$$F_{2j-1}(k,\beta,x) = x_{k-j}^+ + \sum_{i=1}^{q}\beta_i F_{2j-1}(k-i,\beta,x), \quad j = 1,2,\ldots,p,$$
$$F_{2j}(k,\beta,x) = -x_{k-j}^- - \sum_{i=1}^{q}\beta_i F_{2j}(k-i,\beta,x), \quad j = 1,2,\ldots,p,$$
$$F(n,\beta,x) = [1, x_{n-1}^+, -x_{n-1}^-, \ldots, x_{n-p}^+, -x_{n-p}^-].$$

Дисперсия шума $b_k^2$ авторегрессионного процесса $\{y_k\}$ неизвестна, но ограничена сверху величиной $B^2(a+\sum_{i=1}^p(\alpha_i^+ + \alpha_i^-))^2$. Для ее оценки на интервале $[0,n]$ строится компенсирующий множитель $\Gamma_n$, зависящий от распределения помех.

Гарантированная последовательная оценкавектора неизвестных параметров строится согласно взвешенному методу наименьших квадратов и имеет вид

$$\widetilde{\Lambda} = \left(\sum_{k=n+1}^{\tau} v_k y_k U_k^T\right)C^{-1}(\tau), \quad C(t) = \sum_{k=n+1}^{t} v_k U_k U_k^T, \quad \tau = \left\{\min_{t>n+1} : \nu_{\min}(C(t)) \geqslant H\right\},$$

где $\nu_{\min}(C(t))$ — минимальное собственное значение матрицы $C(t)$, $H$ — положительный параметр процедуры. Неотрицательные весовые функции $v_k$ выбираются так, чтобы ограничить шумовую составляющую оценки параметров. Пока матрица $C(k)$ вырожденна, $v_k = 1/\sqrt{\Gamma_n \|U_k\|^2}$. При $k > n + \sigma$, где $n + \sigma$ – первый момент, когда $\nu_{\min}(C(k)) > 0$, множители $v_k$ находятся из условий $\nu_{\min}(C(t))/\Gamma_n = \sum_{k=n+\sigma}^{t} v_k^2 \|U_k\|^2$, $\nu_{\min}(C(\tau))/\Gamma_n \geqslant \sum_{k=n+\sigma}^{\tau} v_k^2 \|U_k\|^2$, $\nu_{\min}(C(\tau)) = H$.

Благодаря выбору момента остановки и весовых функций $\mathbf{M}\,\|\widetilde{\Lambda} - \Lambda\|^2 \leqslant (H + 2p)/H^2$. Изучены асимптотические свойства оценки при больших значениях параметра $H$.