ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2012

Г. М. Давиденко (Чита, ЗабГГПУ). **О решении краевых задач на трехзонной плоскости с трещиной и идеальным контактом сред.**

Рассмотрим плоскость x, y, состоящую из трех однородных зон $D_1(x < 0)$, $D_2(0 < x < l)$, $D_3(x > l)$ с различной проницаемостью k_i в D_i, когда зоны D_1 и D_2 разделены сильно проницаемой трещиной $x = 0$ с параметром A, а контакт $x = l$ зон D_2 и D_3 идеальный. Пусть на плоскости x, y задана гармоническая функция $F(x, y)$, имеющая особые точки (источники, стоки и т. п.) при $x \leqslant 0$. Для потенциалов u_i в D_i задача с заданными особыми точками функции $F(x, y)$ имеет вид [1, 2]:

$$\Delta u_i = 0, \quad (x, y) \in D_i, \tag{1}$$

$$x = 0\colon \quad u_1 = u_2, \quad k_2 \partial_x u_2 - k_1 \partial_x u_1 = A \partial_x^2 u_1, \tag{2}$$

$$x = l\colon \quad u_2 = u_3, \quad k_2 \partial_x u_2 = k_3 \partial_x u_3, \tag{3}$$

где $\partial_x^n = \partial^n / \partial x^n$, при этом в окрестности особых точек выполняется условие

$$u_1 \sim F(x, y). \tag{4}$$

Задачу (1)–(4) решаем методом свертывания разложений Фурье [2]. Полагая, что функция $F(0, y)$ разлагается в интеграл Фурье, представим функцию $F(x, y)$ в полуплоскости $x \geqslant 0$, где она не имеет особых точек, в виде

$$F(x, y) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} g \, d\lambda, \quad x \geqslant 0, \tag{5}$$

где $g = f_1 \sin \lambda y + f_2 \cos \lambda y$, f_i — коэффициенты Фурье функции $F(0, y)$. Отсюда, применяя метод Фурье, решение задачи (1)–(4) получим в виде $u_1 = F(x, y) + \int_0^\infty a e^{\lambda x} g \, d\lambda$ для $x \leqslant 0$, $u_2 = \int_0^\infty (b \operatorname{sh} \lambda x + d \operatorname{ch} \lambda x) g \, d\lambda$ для $0 \leqslant x \leqslant l$, $u_3 = \int_0^\infty p e^{-\lambda(x-l)} g \, d\lambda$ для $x \geqslant l$, где

$$a = -1 + \frac{2k_1(k_3 \operatorname{sh} \lambda l + k_2 \operatorname{ch} \lambda l)}{r}, \quad b = -\frac{2k_1(k_3 \operatorname{ch} \lambda l + k_2 \operatorname{sh} \lambda l)}{r},$$

$$d = \frac{2k_1(k_3 \operatorname{sh} \lambda l + k_2 \operatorname{ch} \lambda l)}{r}, \quad p = \frac{2k_1 k_2}{r},$$

$$\frac{1}{r} = \frac{2e^{-\lambda l}}{(k_2 + k_3)(k_1 + k_2 + A\lambda)(1 - q)} = \frac{2}{A(k_2 + k_3)} \sum_{n=0}^\infty e^{-2\lambda n l - \lambda l} \mu^n \frac{(\lambda + \nu)^n}{(\lambda + \gamma)^{n+1}},$$

$$q = e^{-2\lambda l} \mu \frac{\lambda + \nu}{\lambda + \gamma}, \quad \mu = \frac{k_3 - k_2}{k_3 + k_2}, \quad \nu = \frac{k_1 - k_2}{A}, \quad \gamma = \frac{k_1 + k_2}{A},$$

при этом учитываем, что знаменатель q геометрической прогрессии $|q| < 1$ при $0 \leqslant \lambda < \infty$. Из разложения функции $F(x, y)$ (5) следует формула, указанная в работе [3]:

$$\frac{(-1)^k}{n!} \int_0^\infty e^{(\nu - \gamma)t} t^n \partial_t^k [e^{-\nu t} F(x + t, y)] \, dt = \int_0^\infty \frac{(\lambda + \nu)^k}{(\lambda + \gamma)^{n+1}} e^{-\lambda x} g \, d\lambda.$$

Отсюда решение u_i задачи (1)–(4) примет вид без разложений Фурье

$$\begin{aligned} u_1 \;&=\; F(x,y) - F(-x,y) + (\nu+\gamma)\sum_{n=0}^{\infty}\mu^n \Phi_{n\,n}(-x+2nl,y) \\ &\quad -(\nu+\gamma)\sum_{n=0}^{\infty}\mu^{n+1}\Phi_{n\,n}(-x+2l+2nl,y), \\ u_2 \;&=\; (\nu+\gamma)\sum_{n=0}^{\infty}\mu^n \Phi_{n\,n}(x+2nl,y) \\ &\quad -(\nu+\gamma)\sum_{n=0}^{\infty}\mu^{n+1}\Phi_{n\,n}(-x+2l+2nl,y), \\ u_3 \;&=\; (\nu+\gamma)(1-\mu)\sum_{n=0}^{\infty}\mu^n \Phi_{n\,n}(x+2nl,y), \end{aligned}$$

где

$$\Phi_{k\,n}(x,y) = \frac{(-1)^k}{n!}\int_0^{\infty} e^{(\nu-\gamma)t}t^n \partial_t^k [e^{-\nu t}F(x+t,y)]\,dt.$$

Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ, № 1.3985.2011.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А. Н.*, *Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977, 735 с.
2. *Холодовский С. Е.* Метод свертывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве. — Дифференц. уравнения, 2009, т. 45, № 8, с. 1204–1208.
3. *Холодовский С. Е.* О решении краевых задач в полупространстве, ограниченном многослойной пленкой. — Ученые записки ЗабГГПУ. Сер. Физ., матем., техника, технология, 2001, № 3 (38), с. 160–164.