ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2012

С. В. С т а ф е е в (Петрозаводск, ИПМИ КарНЦ РАН). **О факторном анализе с негауссовскими общими факторами.**

Рассмотрим модель факторного анализа

$$\mathbf{X} = \mathbf{AH} + \mathbf{Y}, \tag{1}$$

где $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}^t$ — вектор с матрицей ковариаций $\Sigma = (\sigma_{ij})$ и множеством третьих моментов $\Gamma = \{\mathbf{M}\,(X_i X_j X_l)\,,\ i,j,l = 1,2,\ldots,n\}$, $\mathbf{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_k\}^t$ — множество независимых латентных (скрытых) случайных величин с $\mathbf{M}\,(H_j) = 0$, $\mathbf{M}\,(H_j)^2 = 1$ и $\mathbf{M}\,(H_j)^3 = d_j$, $j = 1,2,\ldots,k$; $\mathbf{A} = (a_{ij})$ — матрица факторных нагрузок. Вектор остатков $\mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}^t$ имеет распределение с нулевым вектором математических ожиданий и матрицей ковариаций $\Theta_G = (\theta_{ij})$. Векторы $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{H}$ являются независимыми. Взаимосвязь между компонентами вектора $\mathbf{Y}$ представляется в виде графовой модели со структурой $G = (V,E)$, где $V = \{1,2,\ldots,n\}$ и $(i,j) \notin E$, если Y_i и Y_j являются независимыми.

Параметры модели (1) состоят из матрицы факторных нагрузок $\mathbf{A}$, вектора третьих моментов (коэффициентов асимметрии) факторов $\mathbf{D} = \{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$ и ненулевых элементов матрицы Θ_G.

Модель (1) называется *глобально идентифицируемой*, если по матрице Σ и множеству Γ матрица $\mathbf{A}$ определяется с точностью до перестановки и знаков столбцов, элементы вектора $\mathbf{D}$ — с точностью до знака, а элементы матрицы Θ_G определяются однозначно.

Пусть $\overline{G} = (V, \overline{E})$ — дополнительный к G граф. Образуем граф $\mathcal{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$, где $\mathbf{V} = \{\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_k)\,,\ 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant k\}$, а $\mathbf{E} = \{(\mathbf{i},\mathbf{j})\,|\,\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_k), \mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_k), (i_s, j_l) \in \overline{E}, s,l = 1,2,\ldots,k\}$. Каждому ребру графа $\mathcal{G}$ поставим в соответствие детерминант $|\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}|$ матрицы $\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = (\sigma_{i_m,j_l})_{m,l=1}^k$. Данный $k \times k$ минор матрицы Σ будем называть *весом ребра* $(\mathbf{i},\mathbf{j})$.

Теорема. *Пусть все элементы вектора факторов* $\mathbf{D}$ *имеют конечные и ненулевые коэффициенты асимметрии и пусть вектор остатков* $\mathbf{Y}$ *обладает конечными третьими моментами. Модель* (1) *является глобально идентифицируемой, если граф, полученный из графа* $\mathcal{G}$ *посредством удаления ребер, соответствующих нулевым весам, содержит компоненту связности* $\mathcal{G}' = (\mathbf{V}', \mathbf{E}')$ *с нечетным простым циклом и* $\cup_{\mathbf{i} \in \mathbf{V}'} \mathbf{i} = V$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каган А. М.*, *Линник Ю. В.*, *Рао С. Р.* Характеризационные задачи математической статистики. М.: Физматлит, 1972, 656 с.
2. *Bonhomme S.*, *Robin J. M.* Consistent Noisy Independent Component Analysis. — Journal of Econometrics, 2009, v. 149 (1), p. 12–25.

3. *Стафеев С. В.* Об условиях глобальной идентифицируемости для моделей факторного анализа. — Труды Карельского научного центра Российской академии наук, 2011, в. 5, с. 111–114.
4. *Стафеев С. В.* О модели факторного анализа с зависимыми остатками. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 6, с. 1058-1064.