ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2012

Е. А. З о л о т а р е в а (Ростов-на-Дону, ФГОУ ЮФУ). **Динамическая модель акустической среды с учетом наноструктуры.**

Для анализа динамики сред с учетом наноструктуры используем обобщенные динамические уравнения градиентной упругости в перемещениях $u(x,y,z,t) = \{U,V,W\}^T$ [1], эквивалентные континууму Леру [2] при определенных соотношениях физических параметров, вырождающиеся в акустическом случае ($\lambda \neq 0$) в систему

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}-c\left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial z^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial z}+\frac{\partial^4 W}{\partial x \partial z^3}\right)=\frac{\rho}{\lambda}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},\\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}+\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}-c\left(\frac{\partial^4 W}{\partial z^4}+\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial z^2}+\frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial z}+\frac{\partial^4 U}{\partial x \partial z^3}\right)=\frac{\rho}{\lambda}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2},\end{aligned} \tag{1}$$

где ρ – плотность среды; λ — коэффициент Ламе.

В случае гармонической структуры волнового поля смещений

$$\{U(x,z,t), W(x,z,t)\} = \{u(z), w(z)\} e^{i\alpha x - i\omega t} \tag{2}$$

определим собственные функции и собственные значения. Для этого обозначим a акустическую скорость, и связанный с ней частотный параметр φ следующим образом: $a = (\lambda/rho)^{1/2}$, $\varphi^2 = (\omega/a)^2 = \omega^2\rho/\lambda$.

Решив задачу на собственные функции и собственные значения для операторов (1) с учетом представления (2), получим четыре собственных значения $\gamma_j = \gamma_j(\alpha,\varphi)$, $j = 1,2,3,4$, в следующем виде:

$$\gamma_j = \pm(\alpha^2 - [-1 \pm (1+4c\varphi^2)^{1/2}]/2c)^{1/2}, \quad j = 1,2,3,4. \tag{3}$$

На основании асимптотических разложений в (3) при $c \to 0$ показано, что два собственных значения

$$\gamma_j|_{c\to 0} = \pm(\alpha^2 - \varphi^2)^{1/2}\,(1 + O\,(c)), \quad j = 1,2, \tag{4}$$

непрерывно переходят в значения предельной (при $c = 0$) акустической задачи, а остальные два

$$\gamma_j|_{c\to 0} = \pm c^{-1/2}(1 + c(\alpha^2+\varphi^2)/2 + O\,(c^2\varphi^4)), \quad j = 3,4, \tag{5}$$

устремляются к бесконечности, $|\gamma_j| \to \infty$.

Таким образом, для поля смещений в условиях деформации растяжения–сжатия (акустики среды) общее решение системы (1) в рамках модели однопараметрической градиентной упругости принимает вид

$$U(x,z,t) = e^{i\alpha x - i\omega t}\sum_{j=1}^{4} u_j(\alpha,\varphi)\, e^{\gamma_j z}, \quad W(x,z,t) = e^{i\alpha x - i\omega t}\sum_{j=1}^{4} w_j(\alpha,\varphi)\, e^{\gamma_j z}. \tag{6}$$

В общем решении (6) амплитудные кинематические факторы $u_j(\alpha,\varphi)$, $w_j(\alpha,\varphi)$ определяются из граничных условий конкретной краевой задачи для уравнений (1), а собственные значения заданы соотношениями (3).

Из асимптотик (4)–(5) следует, что в решении (6) первые два слагаемых ($j = 1,2$) представляют регулярные составляющие и обеспечивают предельный переход при $c \to 0$ результатов акустического приближения градиентной упругости в общее решение классической задачи акустики.

При естественных условиях ограниченности волнового поля (6): $|\gamma_j z| = |zc^{-1/2}|\{1 + O\,(c(\alpha^2+\varphi^2))\}_{c\to 0} \leqslant \mathrm{const}$, $\alpha^2+\varphi^2 \leqslant \mathrm{const}$, $j = 3,4$, оставшиеся слагаемые в (6), обусловленные градиентной моделью ($j = 3,4$), определяют погранслойные составляющие смещений, вносящие при $c \to 0$ конечный вклад лишь для малых значений z . Наличие таких погранслойных составляющих общего решения (6) в рамках динамической модели градиентной упругости, как и для исследованной ранее антиплоской модели [4], позволяет учитывать локальные динамические процессы, как это было показано для статической модели [3], на уровне микро- и наноструктуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zolotarev A. A.* Materials dynamics simulation with regard to their nanostructural features. — In: Materials of Nanotechnology International Forum «RusNanotech 2010» (Moscow, 1-3 November 2010).
2. *Le Roux.* Etude geometrique de la torsion et de la flexion. — Ann. Scient. De L'Ecole Normale Sup. Paris: 1911, v. 28.
3. *Гуткин М. Ю., Микаелян К. Н., Айфантис Е. С.* — ФТТ, 2000, т. 42, № 9, с. 1606.
4. *Золотарева Е. А.* Математическое моделирование динамики наноструктурных сред. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 5, с. 725.