

Е. Ю. Иванов, Г. Ю. Ермоленко (Самара, СамГУПС). **Напряженно-деформированное состояние стенки цилиндра двигателя внутреннего сгорания, находящегося под переменным тепловым воздействием.**

Рассматривается тонкостенный цилиндр двигателя внутреннего сгорания. т.е. такой, что отношение его внутреннего диаметра к толщине стенки велико. Учитывая это, в качестве математической модели, учитывающей напряженно-деформированное состояние цилиндра, выбирается несвязная задача термоупругости, которая в цилиндрических координатах имеет вид [1]

$$r \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r},$$

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu} (\varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\theta\theta}), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu} (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu \varepsilon_{rr}), \quad \sigma_{rr}|_{r=a} = -p_a, \quad u_r|_{r=b} = u_0,$$

$$\frac{\partial^2 \Theta(r, t)}{\partial r^2} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial \Theta(r, t)}{\partial t} = 0, \quad \Theta(r, t = 0) = 0, \quad \Theta(r = a, t) = \Theta_a(t), \quad \Theta(r = b, t) = \Theta_b(t).$$

Здесь $\sigma_{rr}(r, t)$, $\varepsilon_{rr}(r, t)$, $u_r(r, t)$ — компоненты вектора перемещений, тензоров напряжений и деформаций соответственно, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, a и b — внутренний и внешний радиусы цилиндра, p_a — давление внутри цилиндра, u_0 — перемещение внешней стенки цилиндра, $\Theta(r, t)$ — температура, χ — коэффициент теплопроводности, ζ — коэффициент линейного теплового расширения.

На первом этапе рассчитаем температуру стенки цилиндра как функцию радиуса r и времени t . Для этого с помощью преобразования Фурье по времени [2] вида $\Theta^*(r, k) = \int_0^\infty \Theta(r, t) e^{-itk} dt$ сведем уравнение теплопроводности к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial^2 \Theta^*(r, k)}{\partial r^2} - \frac{1}{\chi} ik \Theta^*(r, k) = 0.$$

Решая его известными методами [3], получим

$$\Theta^*(r, k) = \frac{\Theta_a^*(k)e^{-zb} - \Theta_b^*(k)e^{-za}}{e^{-z(b-a)} - e^{z(b-a)}} e^{zr} - \frac{\Theta_a^*(k)e^{zb} - \Theta_b^*(k)e^{za}}{e^{-(b-a)z} - e^{(b-a)z}} e^{-zr}, \quad (*)$$

где $z = \sqrt{i\chi k}$. Используя (*), находим температуру стенки цилиндра как функцию радиуса и времени: $\Theta(r, t) = (2\pi)^{-1} \int_0^\infty \Theta^*(r, k) e^{itk} dk$.

На втором этапе, решая краевую задачу упругости

$$\frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \zeta \frac{\partial \Theta(r, t)}{\partial r},$$

$$\frac{E}{1-\nu} \left[\frac{\partial u(r)}{\partial r} + \frac{\nu}{r} u(r) \right] \Big|_{r=a} = -p_a, \quad u(r)|_{r=b} = u_0,$$

для искомого перемещения $u(r, t)$ получим

$$u(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left(\frac{k_1}{r}(rz - 1)[\Theta_a e^{(r-b)z} - \Theta_b e^{(r-a)z}] + \frac{k_1}{r}(rz + 1)[\Theta_a e^{(b-r)z} - \Theta_b e^{(a-r)z}] \right. \\ \left. + \frac{bu_0^*}{r} + \frac{k_2(1-\nu)}{r}(r^2 - b^2) \left\{ bu_0 - \frac{a^2 p_a}{E} + k_1 \{ [(bz - 1)\Theta_b + (az + 1)\Theta_a] e^{(b-a)z} \right. \right. \\ \left. \left. + [(bz + 1)\Theta_b + (az - 1)\Theta_a] e^{(a-b)z} - 2z(b\Theta_a + a\Theta_b) \right\} \right. \\ \left. + \frac{k_1}{r} [(bz - 1)\Theta_b e^{(b-a)z} + (bz + 1)\Theta_b e^{(a-b)z} - 2bz\Theta_a] e^{ikt} dk \right.$$

Здесь

$$k_1 = \frac{(1-\nu)\zeta}{(1-2\nu)(e^{(a-b)z} - e^{(b-a)z})z^2}, \quad k_2 = \frac{1}{(1+\nu)a^2 + (1-\nu)b^2}.$$

Найденные перемещения позволяют вычислить напряжения, возникающие в стенке цилиндра:

$$\sigma_{rr}(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{Ek_2[(1+\nu)r^2 + (1-\nu)b^2]}{r^2} \left\{ bu_0^* - \frac{a^2 p_a^*}{E} + k_1 \{ [(bz - 1)\Theta_b^* \right. \\ \left. + (az + 1)\Theta_a^*] e^{(b-a)z} + [(bz + 1)\Theta_b^* + (az - 1)\Theta_a^*] e^{(a-b)z} - 2z(b\Theta_a^* + a\Theta_b^*) \right\} \\ \left. - \frac{u_0^* E}{r^2} - \frac{k_1 E}{r^2} [(bz - 1)\Theta_b^* e^{(b-a)z} + (bz + 1)\Theta_b^* e^{(a-b)z} - 2bz\Theta_a^*] + \frac{k_1 E}{r^2} \right. \\ \left. \times \{ (1-rz)[\Theta_a^* e^{(r-b)z} - \Theta_b^* e^{(r-a)z}] - (1+rz)[\Theta_a^* e^{(b-r)z} - \Theta_b^* e^{(a-r)z}] \} e^{ikt} dk.$$

Для построения графиков распределения температуры в стенке цилиндра, а также перемещений и возникающих в ней напряжений использовались численные методы. Расчет проводился средствами пакета Mathcad 15.

Основные параметры цилиндра: внутренний и внешний радиусы $a = 100$ мм, $b = 105$ мм., модуль Юнга $E = 21000$ кг/мм², коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. давление $p_a = 0,1$ кг/мм², коэффициент линейного расширения $\zeta = 0,000011$ 1/град., коэффициент теплопроводности $\chi = 0,0011$ кал./мм сек-град., удельная теплоемкость единицы объема $\delta = 49$ кал/град. Кроме того, для расчетов было принято $u_0 = 0,003$ мм, $\Theta_a = t$, $\Theta_b = \sin(3t)$.

На представленных ниже рис. 1-3 приведены графики температуры $\Theta(r, t)$, напряжений $\sigma_{rr}(r, t)$ и перемещений $u(r, t)$ в зависимости от радиуса r и времени t .

Из графиков следует, что на одной стенке цилиндра эти параметры изменяются по синусоидальному закону, а на другой — по линейному, как это и следует из краевых условий для температуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976, 662 с.
2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981, 543 с.
3. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982, 332 с.

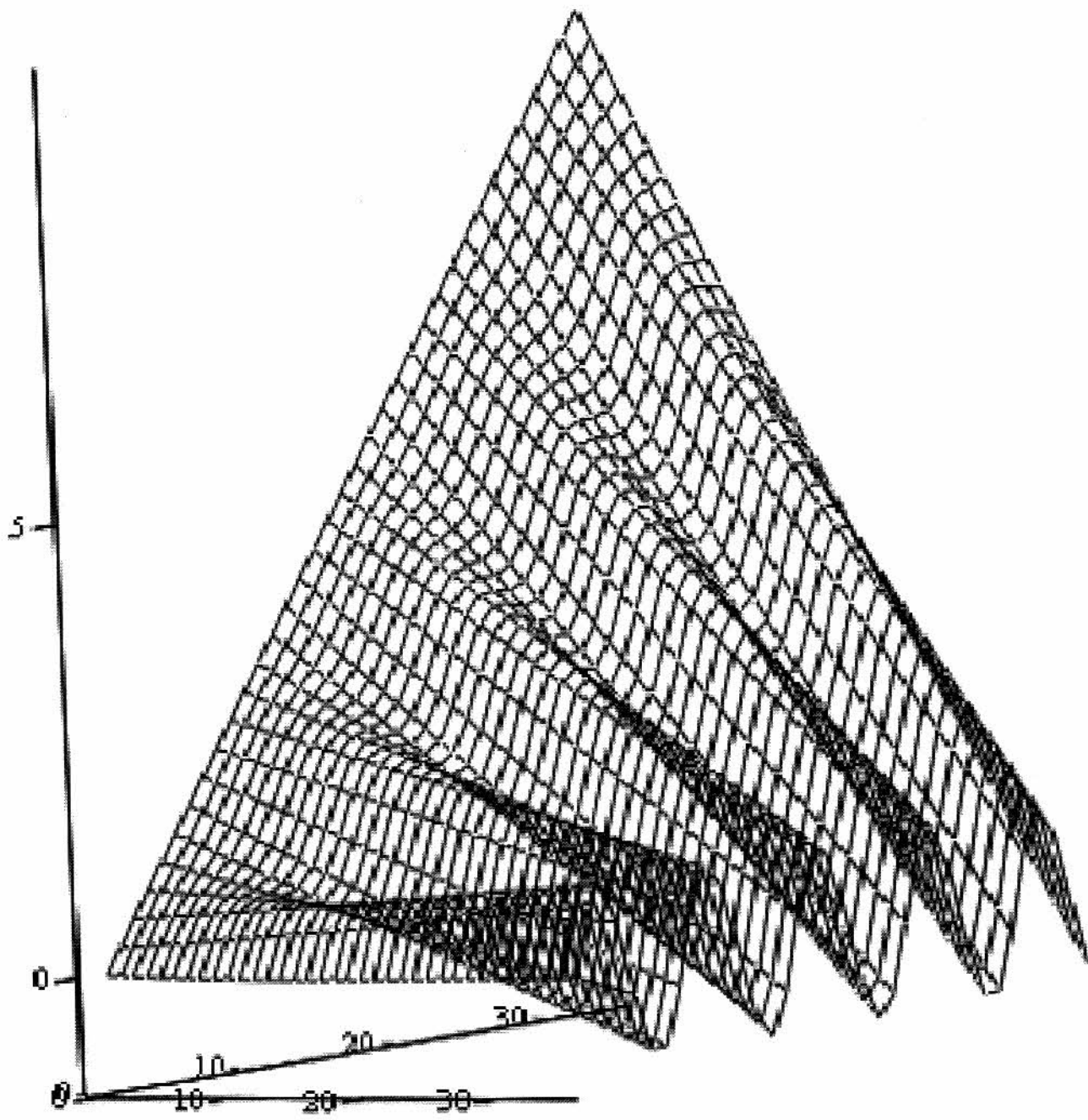


Рис. 8

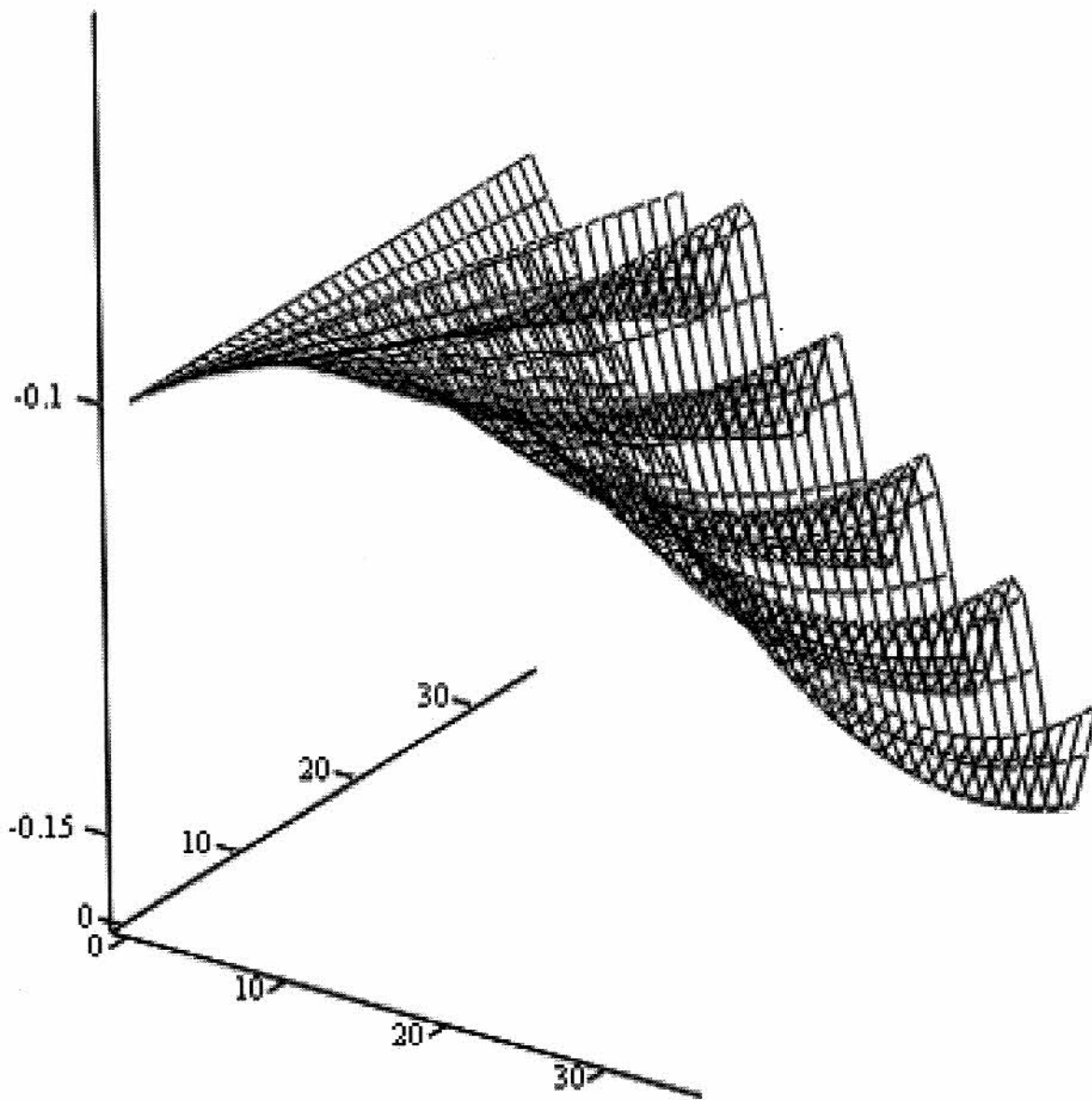


Рис 2

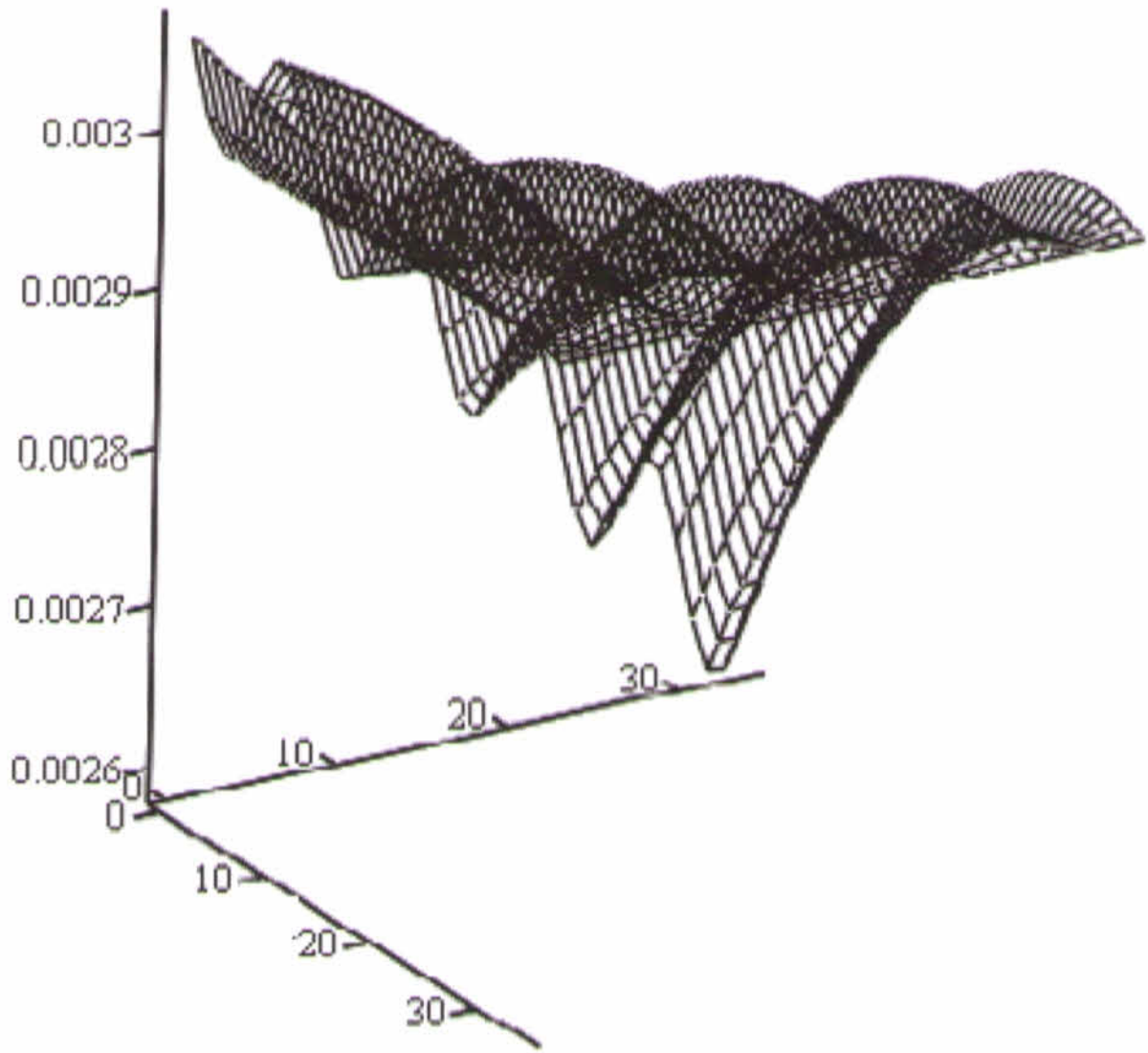


Рис 3