ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2012

А. В. Калинкин, С. А. Кривцов (Москва, МГТУ). **Спиралевидные реализации марковского процесса рождения и гибели квадратичного типа $\mathbf{T_1 + T_2 \to 2T_1}$, $\mathbf{T_1 \to 0}$, $\mathbf{0 \to T_2}$.**

Рассматривается однородный во времени марковский процесс рождения и гибели $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $N^2 = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)\,,\ \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, 2, \ldots\}$, переходные вероятности $P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = (\beta_1, \beta_2)\,|\,\xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2)\}$ которого при $t \to 0+$ представимы в виде $(\lambda_2 > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_0 > 0)$

$$
\begin{aligned}
&P_{(\alpha_1+1,\alpha_2-1)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = \lambda_2\alpha_1\alpha_2 t + o\,(t), \quad P_{(\alpha_1-1,\alpha_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = \lambda_1\alpha_1 t + o\,(t),\\
&P_{(\alpha_1,\alpha_2+1)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = \lambda_0 t + o\,(t), \quad P_{(\alpha_1,\alpha_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = 1 - (\lambda_2\alpha_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_1 + \lambda_0)t + o\,(t).
\end{aligned}
$$

Экспоненциальная (двойная) производящая функция переходных вероятностей $\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2=0}^{\infty} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}/(\alpha_1!\alpha_2!) P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2}$ ($|s_1| \leqslant 1$, $|s_2| \leqslant 1$) удовлетворяет первому и второму уравнениям Колмогорова [2]

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \;&=\; \lambda_2 z_1 z_2 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_2}\right) + \lambda_1 z_1 \left(\mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1}\right) + \lambda_0 \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_2} - \mathcal{F}\right),\\
\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \;&=\; \lambda_2 (s_1^2 - s_1 s_2) \partial^2 \mathcal{F} \partial s_1 \partial s_2 + \lambda_1 (1 - s_1) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_1} + \lambda_0 (s_2 - 1)\mathcal{F},
\end{aligned}
$$

$\mathcal{F}(0; z_1, z_2; s_1, s_2) = e^{z_1 s_1 + z_2 s_2}$.

Скачки марковского процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ изображены на рис. 1.

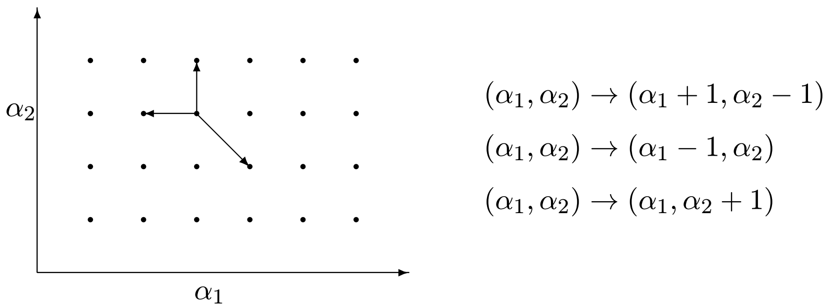

Рис. 1. Скачки процесса повторяющейся эпидемии

Случайный процесс интерпретируется как модель распространения инфекции в популяции с двумя типами особей: тип T_1 — инфицированные; тип T_2 — восприимчивые. Процесс $\xi(t)$ введен в [1] как модель повторяющейся эпидемии и обобщает марковский процесс эпидемии Бартлетта–Мак-Кендрика допущением, что число восприимчивых особей пополняется извне иммиграцией. Для кинетической схемы $T_1 + T_2 \to 2T_1$,

$T_1 \to 0$, $0 \to T_2$ уравнения детерминированной модели имеют вид ($x_1(t)$ — количество T_1 , $x_2(t)$ — количество T_2)

$$\dot{x}_1 = \lambda_2 x_1 x_2 - \lambda_1 x_1, \quad \dot{x}_2 = -\lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_0, \quad x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0. \qquad (1)$$

Система нелинейных уравнений (1) исследована в [1] путем линеаризации в окрестности точки стационарности $(\lambda_0/\lambda_1, \lambda_1/\lambda_2)$. При некоторых условиях на параметры показано, что $x_1(t)$, $x_2(t)$ представляют собой затухающие колебания — траектория на фазовой плоскости x_1Ox_2 есть спираль, накручивающаяся на точку стационарности.

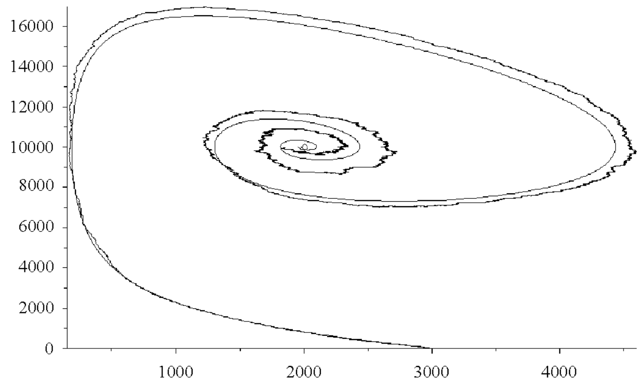

Рис. 2. Пример реализации марковского процесса

На рис. 2 приведен полученный методом Монте-Карло пример спиралеобразной реализации марковского процесса ($\lambda_2 = 0,00005$, $\lambda_1 = 0,5$, $\lambda_0 = 1000$, $\alpha_1 = 3000$, $\alpha_2 = 0$). Процесс $\xi(t)$ длительное время находится в окрестности точки стационарности, но с вероятностью 1 попадает, независимо от значений параметров, в поглощающее множество $\{(0,0),(0,1),(0,2),\ldots\}$. Неизвестны аналитические или прямые вероятностные методы исследования описанного марковского процесса. Ряд других примеров марковских процессов рождения и гибели квадратичного и кубического типов на N^2 с разнообразным поведением реализаций приведен в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бартлетт М. С.* Введение в теорию случайных процессов. М.: ИЛ, 1958, 384 с.
2. *Калинкин А. В.* Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием. — Успехи матем. наук, 2002, т. 57, в. 2, с. 23–84.
3. *Калинкин А. В.* Типовой расчет по марковским процессам рождения и гибели квадратичного типа. — Труды Всероссийской конференции «Прикладная теория вероятностей и теоретическая информатика» (17–18 апреля 2012 г.). М.: Изд-во РУДН, 2012, с. 41–43.