ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2012

В. В. Киселев (Москва, ФГОУ ВПО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»). **Однопродуктовая динамическая модель.**

Ниже приводится новое решение задачи поиска оптимального решения для однопродуктовой модели. Пусть заданы номера этапов $i = 1, 2, \ldots, N$, z_i — количество заказанной продукции, ξ_i – спрос, x_i — исходный запас на начало i-го этапа, h_i — затраты на хранение единицы запаса, переходящей из этапа i в этап $i+1$, k_i — затраты на оформление заказа, $c_i(z_i)$ – функция предельных затрат, связанных с закупкой при заданном z_i, определим $C_i(z_i) = \delta_i k_i + c_i(z_i)$, где $\delta_i = 0$ при $z_i = 0$, $\delta_i = 1$ при $z_i > 0$.

Требуется найти оптимальные значения z_i, минимизирующие общие затраты на оформление заказов, закупку и хранение по всем N этапам. Затраты на хранение предполагаются пропорциональными величине $x_{i+1} = x_i + z_i - \xi_i$, которая представляет собой объем запаса, переходящего из этапа i в этап $i+1$. В результате затраты на хранение на этапе i равны $h_i x_{i+1}$.

Пусть $f_i(x_i)$ – минимальные общие затраты на этапах $i, i+1, \ldots, N$, тогда, используя принцип оптимальности, можно получить рекуррентное уравнение (получено Х. Таха)

$$f_N(x_N) = \min_{z_N + x_N = \xi_N} \{C_N(z_N)\},$$
$$f_i(x_i) = \min_{\xi_i \leqslant x_i + z_i \leqslant \xi_i + \cdots + \xi_N} \{C_i(z_i) + h_i(x_i + z_i - \xi_i) + f_{i+1}(x_i + z_i - \xi_i)\},$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Пусть $N = 3$ и исходные данные заданы в таблице.

Этап i	Спрос ξ_i ед.	Затраты на оформление заказа k_i, долл.	Затраты на хранение h_i, долл.
1	3	3,00	1,00
2	2	7,00	3,00
3	4	6,00	2,00

Исходный запас x_1 для этапа 1 равен 1 ед. Предполагается, что предельные затраты на приобретение продукции составляют 10долл. за каждую единицу для первых трех единиц и 20 долл. для каждой дополнительной единицы, тогда $c_i(z_i) = 10z_i$ для $0 \leqslant z_i \leqslant 3$, $c_i(z_i) = 30 + 20(z_i - 3)$ для $z_i \geqslant 4$.

Очевидно, что для данной задачи для получения оптимальной траектории нет разницы, двигаться от начала к концу траектории, или наоборот. Поэтому можно получить прямое рекуррентное соотношение. Определим состояние на шаге i как объем запаса на конец этапа i, т.е. x_{i+1}. На любом шаге на величины x_{i+1} наложены следующие ограничения: $0 \leqslant x_{i+1} \leqslant \xi_{i+1} + \cdots + \xi_N$.

Пусть $f_i(x_{i+1})$ — минимальные общие затраты на этапах $1, 2, \ldots, i$ при заданной величине запаса x_{i+1} на конец этапа i. Тогда рекуррентное соотношение записывается в виде

$$f_1(x_2) = \min_{0 \leqslant z_1 \leqslant \xi_1 + x_2} \{C_1(z_1) + h_1 x_2\},$$

$$f_i(x_{i+1}) = \min_{0 \leqslant z_1 \leqslant \xi_1 + x_{i+1}} \{C_i(z_i) + h_i x_{i+1} + f_{i-1}(x_{i+1} + \xi_i - z_i)\},\ i = 2, 3, \ldots, N.$$

Теперь результаты пошаговых выражений можно записать так.

Шаг 1. $\xi_1 = 3$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 2 + 4 = 6$; так как $x_1 = 1$, то минимальное значение z_1 равно $\xi_1 - x_1 = 3 - 1 = 2$, $f_1(x_2) = C_1(z_1) + h_1 x_2$.

		$z_1 = 2$	3	4	5	6	7	8		
x_2	$h_1 x_2$	$C_1(z_1) = 23$	33	53	73	93	113	133	$f_1(x_2)$	z_2^*
0	0	23							23	2
1	1		34						34	3
2	2			55					55	4
3	3				76				76	5
4	4					97			97	6
5	5						118		118	7
6	6							139	139	8

Шаг 2. $\xi_2 = 2$, $0 \leqslant x_3 \leqslant 4$, $f_2(x_3) = C_2(z_2) + h_2 x_3 + f_1(x_3 + \xi_2 - z_2)$.

		$z_2 = 0$	1	2	3	4	5	6		
x_3	$h_2 x_3$	$C_2(z_2) = 0$	17	27	37	57	77	97	$f_2(x_3)$	z_2^*
0	0	0+55 =55	17+34 =51	27+23 =50					50	2
1	3	3+76 =79	20+55 =75	30+34 =64	40+23 =63				63	3
2	6	6+97 =103	23+76 =99	33+55 =88	43+34 =77	63+23 =86			77	3
3	9	9+118 =127	26+97 =123	36+76 =112	46+55 =101	66+34 =100	86+23 =109		100	4
4	12	12+139 =151	29+118 =147	39+97 =136	49+76 =125	69+55 =124	89+34 =123	109+23 =132	123	5

Шаг 3. $\xi_3 = 4$, $x_4 = 0$, $f_3(x_4) = C_3(z_3) + h_3 x_4 + f_2(x_4 + \xi_3 - z_3)$.

		$z_3 = 0$	1	2	3	4		
x_4	$h_3 x_4$	$c_3(z_3) = 0$	16	26	36	56	$f_3(x_4)$	z_3^*
0	0	0+123 =123	16+100 =116	26+77 =103	36+63 =99	56+50 =106	99	3

Оптимальное решение: $z_1^* = 2$, $z_2^* = 3$, $z_3^* = 3$, общие затраты составляют 99 долл.