ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2012

А. В. Неклюдов (Москва, МГТУ). **Об отсутствии решений уравнения Гаусса.**

Уравнением Гаусса называется уравнение

$$\Delta u = k(x)e^u, \tag{1}$$

где Δ — n-мерный оператор Лапласа, $k(x) \geqslant 0$ — непрерывная функция, не равная тождественно нулю. Будем рассматривать классические решения уравнения (1) во всем пространстве или внешности шара.

Решения уравнения Гаусса и его обобщений в неограниченных областях рассматривались в [1–5]. В частности, вопрос об отсутствии решений уравнения Гаусса во всем пространстве, возникающий при изучении поверхностей отрицательной гауссовой кривизны, изучался в [1, 2]. В [1] было показано, что если $n = 2$ и выполнено условие $k(x) \geqslant k_0 = \mathrm{const} > 0$, то не существует решения уравнения (1), определенного на всей плоскости. В [2] отсутствие глобальных решений было доказано для любого $n \geqslant 2$ при условии $k(x) \geqslant \theta(|x|)|x|^{-2}$, $\theta(t) \to +\infty$, $t \to +\infty$. В работе, представленной данным докладом, показано, что при $n \geqslant 3$ имеет место отсутствие не только глобальных решений, но и решений во внешних по отношению к шару областях. Причем оценку снизу для коэффициента при нелинейном члене удалось несколько ослабить по сравнению с [2].

Теорема 1. *Пусть* $n \geqslant 3$. *Если при* $|x| \geqslant R_0 > 1$ *выполнено условие* $k(x) \geqslant c_0\,|x|^{-2}\ln^{-1}|x|$, $c_0 = \mathrm{const} > 0$, *то не существует решения* (1), *определенного в области* $|x| \geqslant R_0$.

Заметим, что условие на коэффициент $k(x)$ в условиях теоремы 1 нельзя заменить на более слабое условие $k(x) \geqslant c_0|x|^{-2}\ln^{-1-\varepsilon}|x|$, $\varepsilon > 0$ и даже на условие $k(x) \geqslant c_0|x|^{-2}\ln^{-1}|x|\ln^{-2}\ln|x|$.

В двумерном случае теорема об отсутствии решений уравнения (1) во внешних областях не имеет места даже при условии $k(x) \geqslant c_0|x|^{\alpha}$ при любом $\alpha \in \mathbf{R}$. При $k(x) = |x|^{\alpha}$ таким решением является $u(x) = -(\alpha+2)\ln|x| - 2\ln\ln|x| + \ln 2$.

При этом для $n = 2$ справедлив результат об отсутствии глобальных решений при более слабом условии на коэффициент при нелинейности, нежели в [2]. Этот результат получен для обобщенных по С. Л. Соболеву решений равномерно эллиптического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами в дивергентной форме

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = k(x)e^u, \tag{2}$$

где $k(x) \geqslant 0$ — локально ограниченная измеримая функция.

Теорема 2. *Пусть* $n = 2$. *Если при* $|x| > R_0 = \mathrm{const} > 1$ *выполнено условие* $k(x) \geqslant c_0|x|^{-2}\ln^{-\kappa}|x|$, $c_0, \kappa = \mathrm{const} > 0$, *то не существует решения* (2), *определенного на всей плоскости.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векуа И. Н.* О некоторых свойствах решений уравнения Гаусса. — Труды МИ АН, 1961, т. 64, с. 5–8.
2. *Олейник О. А.* Об уравнении $\Delta u + k(x)e^u = 0$. — Успехи матем. наук, 1978, т. 33, № 2, с. 204–205.
3. *Oleinik O. A.* Some asymptotic problems of the theory of partial differential equations. Lezioni Lincei: Accademia Naz. dei Lincei, Cambridge University Press, 1996.
4. *Насруллаев А. И.* Об асимптотике решений задачи Неймана для уравнения $\Delta u - e^u = 0$ в полубесконечном цилиндре. — Успехи матем. наук, 1995, т. 50, № 3, с. 161–163.
5. *Неклюдов А. В.* Поведение решений полулинейного эллиптического уравнения второго порядка вида $Lu = e^u$ в бесконечном цилиндре. — Матем. заметки, 2009, т. 85, № 3, с. 408–420.