ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2012

И. В. Олемской, **О. С. Фирюлина** (Санкт-Петербург, СПбГУ).
Алгоритм вычисления наибольшего независимого множества.

Рассматривается решение одной из важнейших задач экстремальной теории графов — нахождение наибольшего независимого множества в произвольном неориентированном графе. Эта задача принадлежит к числу так называемых NP-полных задач. В настоящее время наилучшим среди существующих алгоритмов для ее решения считается алгоритм Робсона, теоретическая оценка сложности которого $O\,(2^{0{,}276n})$, где n — число вершин в графе.

В докладе представлен новый точный метод MaxIS для вычисления наибольшего независимого множества. Несмотря на отсутствие теоретической оценки временно́й сложности предложенного алгоритма, для графов с высоким значением плотности MaxIS показывает лучшие экспериментальные временны́е результаты, чем алгоритм Робсона.

Пусть n-вершинный граф $G = (V, E)$ задан матрицей смежностей $A = \|a_{i,j}\|_{n,n}$, где $a_{i,j} = 1$, если $(i,j) \in E$, $a_{i,j} = 0$, если $(i,j) \notin E$. Представим его в виде $G = (V, S_{V,A})$, где $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $S_{V,A} = \{(p,q)\,|\,(p,q) \in (V \times V)\,\&\, a_{p,q} = 0,\ p,q \in V\}$ есть множество всех несмежных пар различных вершин графа G.

Любую пару несмежных вершин (β,γ) будем называть *узлом* и обозначать $\alpha = (\beta,\gamma)$.

Базовым множеством для некоторого узла $\alpha = (\beta,\gamma) \in S_{V,A}$ графа G назовем множество

$$D_G[\alpha] = \{d\,|\,(d,\beta) \in S_{V,A}\,\&\,(d,\gamma) \in S_{V,A}, \quad d \in V\}.$$

Обозначим $Q_G[\alpha]$ максимальное независимое множество в графе G, имеющее в качестве двух своих элементов вершины β и γ.

Теорема 1. *Любое максимальное независимое множество $Q_G[\alpha]$ содержится в базовом множестве, соответствующем паре $\alpha = (\beta,\gamma)$:*

$$Q_G[\alpha] \subseteq D_G[\alpha].$$

Следствие. *Пусть $Q^i_G[\alpha]$ — i-е максимальное независимое множество графа G, содержащее вершины β и γ, тогда*

$$D_G[\alpha] \setminus \cup_{i=1}^{m} Q^i_G[\alpha] = \varnothing,$$

где m — количество всех максимальных независимых множеств в графе G, содержащих вершины β и γ.

В алгоритме MaxIS имеется вспомогательная функция ELIMINATION_FUN, которая используется для сокращения количества рассматриваемых элементов множества $S_{V,A}$, корректируемого на каждом уровне дерева поиска.

Теорема 2. *Если* $D_G[\alpha] \subsetneq D_G[\alpha^*]$, *то для любого* $Q_G[\alpha] \subseteq D_G[\alpha]$ *найдется такое* $\widetilde{Q}_G[\alpha^*] \subseteq D_G[\alpha^*]$, *что* $\widetilde{\widetilde{Q}}_G[\alpha^*] \equiv Q_G[\alpha]$.

Основываясь на теореме 2, процедура ELIMINATION_FUN позволяет исключить из множества $S_{V,A}$ узлы, рассмотрение которых гарантировано приведет к формированию уже построенных максимальных независимых множеств.