ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2012

Р. А. Оганян (Москва, МГОУ). **Комбинаторные формулы для слоев решетки параллелепипеда.**

Нобелиату Леониду Витальевичу Канторовичу, 1912–1986,
с благодарностью.

Оказывается, и для множеств, порождающих комбинаторные числа, имеют место тождества, аналогичные формулам для биномиальных коэффициентов. Эта мысль в 1995 г. приятно удивила С. В. Яблонского, в 1998 г. заинтересовала С. С. Рышкова, а в 2003 г. — и В. И. Арнольда.

Пусть $\overline{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$, $m_i, \tau_i \in \mathbf{N}$, $\overline{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_n)$, $R_i = \{r_{i0}, r_{i1}, \ldots, r_{i,m_i-1}\}$, $r_{ik} < r_{i,k+1}$, $A_{ik} = \{\alpha_{ik,1}, \alpha_{ik,2}, \ldots, \alpha_{ik,a_{ik}}\}$, $\alpha_{ik,j} < \alpha_{ik,j+1}$, $r_{ik}, \alpha_{ik,j} \in \mathbf{Z}$, $\lambda = \sum_{i=1}^n \tau_i r_{i0}$, $\mu = \sum_{i=1}^n \tau_i r_{i,m_i-1}$, $l = \sum_{i=1}^n \tau_i (m_i - 1)$, $\mathcal{P}^n(\overline{m}) \equiv \mathcal{P}(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ — решетка n-мерного параллелепипеда с размерами $m_1, m_2, \ldots, m_n$: $\mathcal{P}^n(\overline{m}) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) :\ x_i = 0, 1, \ldots, m_i - 1\} = \prod_{i=1}^n \{0, 1, \ldots, m_i - 1\}$, $\mathcal{P}_k^n(\overline{m}, \overline{\tau}) \equiv \mathcal{P}_k(m_1, m_2, \ldots, m_n; \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ — k-й $\overline{\tau}$-слой решетки параллелепипеда $\mathcal{P}^n(\overline{m})$: $\mathcal{P}_k^n(\overline{m}, \overline{\tau}) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) :\ x_i = 0, 1, \ldots, m_i - 1,\ \sum_{i=1}^n \tau_i x_i = k\}$, $k = 0, 1, \ldots, l$, $\mathcal{P}_k^n(\overline{m}, \overline{\tau}) = \varnothing$, $k < 0$, $k > l$; $\mathcal{P}^n(\overline{R}) \equiv \mathcal{P}(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ — решетка n-мерного квазипараллелепипеда с ребрами $R_1, R_2, \ldots, R_n$: $\mathcal{P}^n(\overline{R}) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) :\ x_i \in R_i\} = \prod_{i=1}^n R_i \overset{r_{ik}=k}{=} \mathcal{P}^n(\overline{m})$, $\mathcal{P}_k^n(\overline{R}, \overline{\tau}) = \mathcal{P}_k(R_1, R_2, \ldots, R_n; \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ — k-й $\overline{\tau}$-слой решетки $\mathcal{P}^n(\overline{R})$: $\mathcal{P}_k^n(\overline{R}, \overline{\tau}) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) :\ x_i \in R_i,\ \sum_{i=1}^n \tau_i x_i = k\} = \bigcup_{\overline{x} \in \mathcal{P}_k^n(\overline{m}, \overline{\tau})} \prod_{i=1}^n \{r_{i x_i}\} \overset{r_{ik}=k}{=} \mathcal{P}_k^n(\overline{m}, \overline{\tau})$, $m_i = |R_i|$, $\mathcal{P}_k^n(\overline{R}, \overline{\tau}) = \varnothing$, $k < \lambda$, $k > \mu$.

Основные формулы (в скобках — частные случаи):

$$\mathcal{P}^n(\overline{R}) = \bigcup_{k=\lambda}^{\mu} \mathcal{P}_k^n(\overline{R}, \overline{\tau}), \quad \mathcal{P}_i^n(\overline{R}, \overline{\tau}) \bigcap \mathcal{P}_j^n(\overline{R}, \overline{\tau}) = \varnothing, \quad i \neq j,$$

$$\Big\langle \sum_{i=1}^n \tau_i x_i : \overline{x} \in \mathcal{P}^n(\overline{m}) \Big\rangle = [0^{n_0} 1^{n_1} \ldots l^{n_l}] \ \leftrightarrow n_k = |\mathcal{P}_k^n(\overline{m}, \overline{\tau})|, \quad k = 0, 1, \ldots, l, \qquad (0)$$

$$\mathcal{P}^n(\overline{R}) = \mathcal{P}^{n-1}(\overline{R})\, R_n = \bigcup_{i=0}^{m_n-1} \left\{ \begin{array}{c} \boxed{\mathcal{P}^{n-1}(\overline{R})} \\ r_{n,i}\ \ldots\ r_{n,i} \end{array} \right\} = \bigcup_{i=0}^{m_1-1} \left\{ \begin{array}{c} r_{1,i}\ \ldots\ r_{1,i} \\ \boxed{\mathcal{P}(R_2, \ldots, R_n)} \end{array} \right\}, \qquad (1)$$

$$\mathcal{P}_k^n(\overline{R}, \overline{\tau}) = \bigcup_{i=0}^{m_n-1} \mathcal{P}_{k-\tau_n r_{n,i}}^{n-1}(\overline{R}, \overline{\tau})\, \{r_{n,i}\} = \bigcup_{i=0}^{m_n-1} \left\{ \begin{array}{c} \boxed{\mathcal{P}_{k-\tau_n r_{n,i}}^{n-1}(\overline{R}, \overline{\tau})} \\ r_{n,i}\ \ldots\ r_{n,i} \end{array} \right\} \ (C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k),$$

$$\mathcal{P}_k^n(\overline{R}, \overline{\tau}) \sim \mathcal{P}_{\lambda+\mu-k}^n(\overline{R}, \overline{\tau}), \quad |\mathcal{P}_k^n(\overline{R}, \overline{\tau})| = |\mathcal{P}_{\lambda+\mu-k}^n(\overline{R}, \overline{\tau})| \quad (C_n^k = C_n^{n-k}), \qquad (2)$$

$$\bigcup_{i=\lambda}^{k} \mathcal{P}_i^m(\overline{R}, \overline{\tau}) \mathcal{P}_{k-i}^{n-m}(\overline{Q}, \overline{\sigma}) = \mathcal{P}_k^n(R_1, \ldots, R_m, Q_1, \ldots, Q_{n-m}; \tau_1, \ldots, \tau_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-m}) \quad \Big(\sum_{i=0}^{k} C_m^i\, C_{n-m}^{n-i} = C_n^k \Big),$$

$$\prod_{i=1}^{n} \bigcup_{k \in R_i} \{k\} t^{\tau_i k} = \bigcup_{k=\lambda}^{\mu} \mathcal{P}_k^n(\overline{R}, \overline{\tau}) t^k \quad \Big((1+t)^n = \textstyle\sum_{k=0}^n C_n^k t^k \Big),$$

© Редакция журнала «ОПиПМ», 2012 г.

$$\prod_{i=1}^{n}\bigcup_{k\in R_i}A_{ik}t^{\tau_i k}=\bigcup_{k=\lambda}^{\mu}\Big(\bigcup_{\overline{x}\in\mathcal{P}_k^n(\overline{R},\overline{\tau})}\prod_{i=1}^{n}A_{ix_i}\Big)t^k\quad\Big((a+bt)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k t^k\Big),$$

$$\prod_{i=1}^{n}\bigcup_{k=0}^{m_i-1}A_{ik}t^{\tau_i k}=\bigcup_{k=0}^{l}\Big(\bigcup_{\overline{x}\in\mathcal{P}_k^n(\overline{m},\overline{\tau})}\prod_{i=1}^{n}A_{ix_i}\Big)t^k,\quad l=\sum_{i=1}^{n}\tau_i(m_i-1).$$

Из этих тождеств, в частности, следуют формулы для многих комбинаторных множеств [1], а при переходе к мощностям (или иным мерам и весам) — и формулы для комбинаторных чисел с целой рациональной производящей функцией [2, 3].

П р и м е р 1. Решить диофантово уравнение [4]: $\sum_{i=1}^{8}\tau_i x_i=73$, $x_i=0,1$, $\overline{\tau}=(1,2,3,5,10,15,20,50)$.

$$\mathcal{P}^4(\overline{2})=\{0,1\}^4\overset{(1)}{=}\begin{array}{c}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{array}\left\{\begin{array}{c}01001101\;01001101\\00101011\;00101011\\00010111\;00010111\\0000\underset{\smile}{0}000\;1111\underset{\smile}{1}111\end{array}\right\}\begin{array}{c}1\\2\\3\\5\end{array}\to\mathcal{P}_3^4(\overline{2},\overline{\tau})=\left\{\begin{array}{c}01\\01\\10\\00\end{array}\right\},\mathcal{P}_8^4(\overline{2},\overline{\tau})=\left\{\begin{array}{c}01\\01\\10\\11\end{array}\right\},\tag{3}$$

$$x_1+2x_2+3x_3+5x_4:01233456\;5678891011\;\to\mathcal{P}_k^4(\overline{2},\overline{\tau})=\varnothing,\quad k<0,\quad k>11.\tag{4}$$

$$\mathcal{P}_{73}^8(\overline{2},\overline{\tau})\underset{(4)}{\overset{(2)}{=}}\varnothing\bigcup\mathcal{P}_{23}^7\{1\}\overset{(2)}{=}(\mathcal{P}_{23}^6\{0\}\bigcup\mathcal{P}_3^6\{1\})\{1\}\underset{(4)}{\overset{(2)}{=}}[(\varnothing\bigcup\mathcal{P}_8^5\{1\})\{0\}\bigcup\mathcal{P}_3^5\{0\}\bigcup\varnothing)\{1\}]\{1\}$$

$$=\mathcal{P}_8^5\left\{\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right\}\bigcup\mathcal{P}_3^5\left\{\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right\}\bigcup\underset{(4)}{\overset{(2)}{=}}(\mathcal{P}_8^4\{0\}\bigcup\varnothing)\left\{\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right\}\bigcup(\mathcal{P}_3^4\{0\}\bigcup\varnothing)\left\{\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right\}=\mathcal{P}_8^4\left\{\begin{smallmatrix}0\\1\\0\\1\end{smallmatrix}\right\}\bigcup\mathcal{P}_3^4\left\{\begin{smallmatrix}0\\0\\1\\1\end{smallmatrix}\right\}$$

$\overset{(3)}{=}\{\overline{x}_i\}_1^4$, $\overline{x}_1=(0,0,1,1,0,1,0,1)$, $\overline{x}_2=(1,1,0,1,0,1,0,1)$, $\overline{x}_3=(0,0,1,0,0,0,1,1)$, $\overline{x}_4=(1,1,0,0,0,0,1,1)$.

Пусть $A=\{\overline{x}_k\}_1^s\subset\mathbf{Z}^n\subset\mathbf{E}^n$, $\langle x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{is}\rangle=\big[x_{i_0}^{n_0}x_{i_1}^{n_1}\cdots x_{i_{m_i-1}}^{n_{m_i-1}}\big]$, ($x_{i_r}<x_{i_{r+1}}$, $\sum_{r=0}^{m_i-1}n_r=s$), P_i — проектор множества из $\mathbf{Z}^n$ на ось Ox_i: $P_i\{\overline{x}_k\}_1^s=\{x_{i_0},x_{i_1},\ldots,x_{i_{m_i-1}}\}$, $A=\bigcup_{k=0}^{l}A_k$, $A_i\bigcap A_j=\varnothing$, $i\neq j$, $A_k\subset\mathbf{Z}^n$.

Утверждение 1. *Если* $A=\bigcup_{i=1}^{m}\left\{\begin{smallmatrix}x_i & x_i & \cdots & x_i\\ \overline{y}_1 & \overline{y}_2 & \cdots & \overline{y}_n\end{smallmatrix}\right\}$, $mn=s$, $\overline{y}_i\in\mathbf{Z}^{n-1}$, $\bigcup_{k=0}^{m_i-1}P_iA_{i_k}=P_iA$, $P_iA_{i_p}\bigcap P_iA_{i_q}=\varnothing$, $p\neq q$, *то*

$$A=\{x_i\}_1^m\{\overline{y}_i\}_1^n,\quad\bigcup_{k=0}^{l}A_k=\prod_{i=1}^{n}\bigcup_{k=0}^{m_i-1}P_iA_{i_k}.\tag{5}$$

Теорема. *Пусть* $\mathcal{P}_l(t)=\bigcup_{k=0}^{l}A_kt^k$, $A_k\subset\mathbf{Z}^n$, $\varnothing t^k=\varnothing$. *Если система из* $l+2$ *уравнений*

$$\sum_{i=1}^{n}\tau_i(m_i-1)=l,\tag{6}$$

$$\bigcup_{\overline{x}\in\mathcal{P}_k^n(\overline{m},\overline{\tau})}\prod_{i=1}^{n}A_{ix_i}=A_k,\quad k=0,1,\ldots,l,\tag{7}$$

разрешима, то

$$\mathcal{P}_l(t)=\prod_{i=1}^{n}\bigcup_{k=0}^{m_i-1}A_{ik}t^{\tau_i k},\quad A_{ik}\subset\mathbf{Z},\tag{8}$$

верно и обратное.

Утверждение 2. *Пусть* $M_1=\{k\colon k=0,1,\ldots,l,\ |\mathcal{P}_k^n(\overline{m},\overline{\tau})|=1\}$, *тогда для* $k\in M_1$ *уравнения из* (7) *примут более простой вид:* $\prod_{i=1}^{n}A_{ix_i}=A_k$, *где* $\sum_{i=1}^{n}\tau_ix_i=k$.

Утверждение 3. *Пусть* $M_\varnothing(\overline{m},\overline{\tau})=\{k\colon\ k=0,1,\ldots,l,\ \ \mathcal{P}_k^n(\overline{m},\overline{\tau})=\varnothing\}$, $A_\varnothing=\{k\colon\ k=0,1,\ldots,l,\ \ A_k=\varnothing\}$. *Для выполнения условия* (7) *необходимо, чтобы* $M_\varnothing(\overline{m},\overline{\tau})=A_\varnothing$.

П р и м е р 2.1. Пусть в разбиении $A=\bigcup_{k=0}^{7}A_k$: $A_0=\left\{\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right\}$, $A_1=\left\{\begin{smallmatrix}1\,2\\0\,0\end{smallmatrix}\right\}$, $A_2=\varnothing$, $A_3=\left\{\begin{smallmatrix}0\,0\,0\\1\,2\,3\end{smallmatrix}\right\}$, $A_4=\left\{\begin{smallmatrix}1\,1\,1\,2\,2\,2\\1\,2\,3\,1\,2\,3\end{smallmatrix}\right\}$, $A_5=\varnothing$, $A_6=\left\{\begin{smallmatrix}0\,0\\4\,5\end{smallmatrix}\right\}$, $A_7=\left\{\begin{smallmatrix}1\,1\,2\,2\\4\,5\,4\,5\end{smallmatrix}\right\}$. Разложить A на 2 множителя из суммы проекций его блоков A_k.

$P_1A_i = \{0\}$, $i = 0,3,6$, $P_1A_i = \{1,2\}$, $i = 1,4,7$; $P_2A_i = \{0\}$, $i = 0,1$, $P_2A_i = \{1,2,3\}$, $i = 3,4$, $P_2A_i = \{4,5\}$, $i = 6,7$.

$$\begin{aligned} A \;&=\; \bigcup_{k=0}^{7} A_k = \textstyle\bigcup_{i=0}^{2} \left\{ \begin{smallmatrix} i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & i \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{smallmatrix} \right\} \overset{(5)}{=} \{0,1,2\}\,\{0,1,2,3,4,5\} \\ &= (P_1A_0 \textstyle\bigcup P_1A_1)(P_2A_0 \bigcup P_2A_3 \bigcup P_2A_6). \end{aligned} \tag{9}$$

П р и м е р 2.2. Пусть A_k в многочлене $\mathcal{P}_7(t) = \bigcup_{k=0}^{7} A_k t^5$ те же, что и в предыдущем примере. Разложить $\mathcal{P}_7(t)$ на 2 множителя.

Пусть $A_{10} = P_1A_0$, $A_{11} = P_1A_1$; $A_{20} = P_2A_0$, $A_{21} = P_2A_3$, $A_{22} = P_2A_6$. $A \overset{(9)}{=} (\bigcup_{k=0}^{1} A_{1k})(\bigcup_{k=0}^{2} A_{2k}) \overset{(5)}{\to} m_1 = 2$, $m_2 = 3 \overset{(6)}{\to}$ $\tau_1 \cdot 1 + \tau_2 \cdot 2 = 7 \to (\tau_1, \tau_2) = (1,3) \vee (3,2)$.

С л у ч а й $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 3$. $\mathcal{P}(2,3) = \{0,1\}\,\{0,1,2\}$ $\overset{(1)}{=}$ $\begin{array}{r} x_1 \\ x_2 \\ x_1+3x_2: \end{array} \begin{array}{c} \left\{ \begin{smallmatrix} 0&0&0&1&1&1 \\ 0&1&2&0&1&2 \end{smallmatrix} \right\} \\ \begin{smallmatrix} 0&3&6&1&4&7 \end{smallmatrix} \end{array} \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}$ $\to$ $\langle x_1 + 3x_2 : \; (x_1, x_2) \in \mathcal{P}(2,3) \rangle = [0^1 1^1 2^0 3^1 4^1 5^0 6^1 7^1] \overset{(0)}{\to} |\mathcal{P}_k(2,3;1,3)| = 1$, $k \in M_1 = \{0,1,3,4,6,7\} \overset{\text{Утв.2}}{\to} A_{1x_1} A_{2x_2} = A_k$ $(x_1 + 3x_2 = k)$, $k \in M$, т.е. $A_{10} A_{20} = A_0$, $A_{11} A_{20} = A_1$, $A_{10} A_{21} = A_3$, $A_{11} A_{21} = A_4$, $A_{10} A_{22} = A_6$, $A_{11} A_{22} = A_7$. Этой системе уравнений удовлетворяют множества $A_{10}, A_{11}, \ldots, A_{22}$, из определений которых следует $A_{10} = \{0\}$, $A_{11} = \{1,\,2\}$, $A_{20} = \{0\}$, $A_{21} = \{1,\,2,\,3\}$, $A_{22} = \{4,\,5\}$, $\mathcal{P}_7(t) \overset{\text{Теор.}}{=} (\{0\} \bigcup \{1,2\}t)(\{0\} \bigcup \{1,2,3\}t^3 \bigcup \{4,5\}t^6)$.

С л у ч а й $\tau_1 = 3$, $\tau_2 = 2$. $\langle 3x_1 + 2x_2 : \; (x_1, x_2) \in \mathcal{P}(2,3) \rangle = [0^1 1^0 2^1 3^1 4^1 5^1 6^0 7^1] \to M_{\varnothing}(2,3;3,2) = \{k : \; k = 0,1,\ldots,7, \; \mathcal{P}(2,3;3,2) = \varnothing\} = \{1,6\} \neq \{2,5\} = \{k : \; k = 0,1,\ldots,7, \; A_k = \varnothing\} = A_{\varnothing} \overset{\text{Утв.3}}{\to}$ не все условия (7) выполняются, например, при $k = 2$ имеем $\mathcal{P}_2(2,3;3,2) = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \to A_{10} A_{21} \overset{\text{Утв.2}}{=} A_2 = \varnothing$, но $A_{10} A_{21} = \{0\}\{1,2,3\} \neq \varnothing$.

... Новосибирск, Академгородок (28.12.1968). ИЭ. Ученый совет — идет сокращение штатов, пятерых уже сократили. Неожиданно вошел Канторович. Настала моя очередь. Прозвучало: — Не выполнил план — сократить. И тут произошло чудо. Встал Леонид Витальевич: — Нельзя увольнять квалифицированного математика из-за невыполнения плана; академик Понтрягин 4 года не выдавал никакой продукции, а потом выдал теорию оптимальных процессов ... И только я — из черного списка — уцелел.

Запомнились слова Л.В.: «Перемелется — мука будет». И совет: — Не дразните гусей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Оганян Р. А.* Комбинаторные множества. — Вестник Московского государственного областного ун-та, сер. «Физика–Математика», 2005, № 7, с. 129–148.
2. *Оганян Р. А.* Параллелепипедальные числа. — В сб.: Труды IV-й Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем». М.: МГУ, 2000, с. 97–100.
3. *Грехем Р.*, *Кнут Д.*, *Паташник О.* Конкрентная математика. Основание информатики. (С кратким предисловием В. И. Арнольда). М.: Мир, 1998, с. 368, 369, 386.
4. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения./ Под ред. К. А. Рыбникова. М.: 1982, с. 13, задача 1.42.
5. *Вершик А. М.*, *Кутателадзе С. С.*, *Новиков С. П.* Леонид Витальевич Канторович (К 100-летию со дня рождения). — Успехи матем. наук, 2012, в. 3, с. 185.