ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2012

В. И. А ф а н а с ь е в (Москва, МИРАН). **Высокоуровневые докритические ветвящиеся процессы в случайной среде.**

Пусть $\{Z_n\,,\ n \in \mathbf{N}_0\}$ — ветвящийся процесс в случайной среде (ВПСС), задаваемый последовательностью независимых одинаково распределенных (случайных) производящих функций $\{f_n(s)\,,\ n \in \mathbf{N}\}$. Отметим, что Z_n — число частиц в n-м поколении, а производящая функция $f_n(s)\,,\ s \in [0,1]$, определяет закон размножения частиц в $(n-1)$-м поколении, $n \in \mathbf{N}$.

Положим $X_i = \ln f_i'(1)$ при $i \in \mathbf{N}$. Заметим, что случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ являются независимыми и одинаково распределенными. Введем *сопровождающее случайное блуждание* $S_0 = 0\,,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i\,,\ n \in \mathbf{N}$.

Предположим, что процесс $\{Z_n\}$ является *докритическим*, т. е. $\mathbf{E}\,X_1 < 0$. Введем *момент первого достижения уровня* $x > 1$ процессом $\{Z_n\}$: $T_x = \min\{n \,|\, Z_n > x\}$. Нас интересуют *асимптотические свойства* процесса $\{Z_n\}$ при условии, что достижим уровень $x\,,\ x \to +\infty$. По поводу аналогичных задач для *критического* ВПСС см. [1].

Основное предположение: существует такое положительное число $\varkappa$, что

$$\mathbf{E}\, e^{\varkappa X_1} = 1 \quad \text{и} \quad \mathbf{E}\,(|X_1|\, e^{\varkappa X_1}) < +\infty. \tag{1}$$

Условие (1) касается только блуждания $\{S_n\}$, которое в случае докритического ВПСС имеет отрицательный снос. Условие (1) является классическим для случайных блужданий с отрицательным сносом и позволяет осуществить переход к *сопряженному случайному блужданию* с положительным сносом.

Кроме того, предположим, что

$$\mathbf{E}\,(Z_1 \ln(Z_1+1) e^{(\varkappa-1)X_1}) < +\infty, \tag{2}$$

а при $\varkappa \geqslant 1$ существует такое число $p > \varkappa$, что

$$\mathbf{E}\,(Z_1^p\, e^{(\varkappa-p)X_1}) < +\infty. \tag{3}$$

В работе [2] установлено, что если выполнены условия (1)–(3), то $\mathbf{P}\{T_x < +\infty\} \sim Cx^{-\varkappa}\,,\ x \to +\infty$, где C — положительная постоянная.

Введем *время жизни* процесса $\{Z_n\}$: $T = \min\{n \,|\, Z_n = 0\}$. В работе, представленной данным сообщением, получены *законы больших чисел* для случайных величин T_x и T, рассматриваемых при условии, что $T_x < +\infty$. Положим $a = 1/\mathbf{E}\,(X_1 e^{\varkappa X_1}) > 0\,,\ b = 1/\mathbf{E}\,X_1$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1) – (3), *тогда при* $x \to +\infty$

$$\left\{ \frac{T_x}{\ln x} \,\middle|\, T_x < +\infty \right\} \xrightarrow{\mathbf{P}} a.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1) – (3), *тогда при* $x \to +\infty$

$$\left\{ \frac{T}{\ln x} \,\middle|\, T_x < +\infty \right\} \stackrel{\mathbf{P}}{\to} a - b.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-01-00139.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасьев В. И.* Принцип инвариантности для критического ветвящегося процесса в случайной среде, достигающего высокого уровня. — Теория вероятн. и ее примен., 2009, т. 54, в. 1, с. 3–17.
2. *Afanasyev V. I.* On the maximum of a subcritical branching process in a random environment. — Stochastic Processes and their Applications, 2001, v. 93, № 1, p. 87–107.