ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2012

В. Г. Выскребцов (Москва, МГТУ «МАМИ»). **О возможности найти общее решение уравнений Навье–Стокса.**

Хотя законы движения твердых тел со времен работ Ньютона установлены сравнительно давно, движение частиц жидкостей и газов оказалось количественно описать гораздо труднее. Основы учения о движении жидкости с учетом такого ее свойства, как вязкость, были заложены французским ученым Навье (1821 г.) и получили свой современный вид в работах англичанина Стокса (1845 г.). По настоящее время соответствующие уравнения сохранили свой вид и обычно называются уравнениями Навье-Стокса (НС) или просто Стокса.

Уравнения НС являются системой дифференциальных уравнений в частных производных для компонентов скорости частицы жидкости $\mathbf{V}$ (U, V, W). К настоящему времени существует необозримое число теоретических работ по исследованию уравнений НС, но общее решение их отсутствует, как и общая теория решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Эти уравнения НС удалось решить лишь для немногих частных случаев, которые можно разделить на два типа. К первому типу можно отнести два вида точных решений уравнений, причем эти аналитически простейшие решения описывают наблюдаемые типы течений: течение Пуазейля и течение Куэтта. Скорости у этих течений имеют ограниченные значения. Течения возможны в ограниченной области пространства.

Ко второму типу можно отнести гораздо большее число (несколько десятков) аналитически точных решений, которые, однако, требуют неопределенно больших значений скоростей течения и неопределенно больших областей пространства. Из наиболее известных течений такого типа можно указать на струйные течения Ландау или Сквайра или вращение в вязкой жидкости диска бесконечно большого диаметра (задача Кармана). Наблюдения таких течений автору не известны.

Кроме этоо, существует множество приближенных решений, полученных численными методами с применением ЭВМ, степень количественного соответствия которых реально наблюдаемым течениям фактически не известна.

Далее делается попытка анализа уравнений НС в общем виде, которые для краткости, следуя учебнику Л. Г. Лойцянского, можно записать в векторной форме как

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{V}\times\mathbf{V} = -\operatorname{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \Pi + \mathbf{V}^2/2\right) - \nu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{V}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{V} = \mathbf{V}(U, V, W)$ — вектор скорости с координатами U, V, W в декартовой прямоугольной системе координат. Остальные обозначения соответствуют учебнику Лойцянского. К (1) присоединяется еще уравнение несжимаемости: $\operatorname{div}\mathbf{V} = 0$. Если принять допущение, что среда (жидкость) не имеет вязкости, т. е. $\nu = 0$, то уравнение (1) примет форму уравнения Эйлера.

Уравнение (1) можно преобразовать, что иногда и делается, к более удобному виду $\nabla^2\mathbf{V} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{V} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{V}$, которая при наличии $\operatorname{div}\mathbf{V} = 0$ приводится к виду $\nabla^2 V = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{V}$.

Теперь с учетом того, что для любого скалярного поля N справедливо соотношение $\operatorname{rot}\operatorname{grad} N = 0$, уравнение движения (1) частицы вязкой несжимаемой жидкости может быть в векторном виде записано как

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) + \operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\mathbf{V}\times\mathbf{V}\right) = -\nu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{V}. \qquad (2)$$

Так как операции частного дифференцирования по времени и дифференцирования по координатным осям перестановочны вследствие независимости переменных, окончательно (2) можно записать в виде

$$\frac{\partial(\operatorname{rot}\mathbf{V})}{\partial t} + \operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\mathbf{V}\times\mathbf{V}\right) = -\nu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{V}. \qquad (3)$$

В выражении (3) два члена линейны относительно скорости, а третий член – квадратичная величина относительно скорости. При установившемся движении (т. е при $\operatorname{rot}\mathbf{V} = 0$) получим из (3)

$$\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\mathbf{V}\times\mathbf{V}\right) = -\nu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{V}. \qquad (4)$$

Из уравнения (4) следует, что имеются две возможности. Или траектории движения частиц жидкости при установившемся движении не меняются с изменением скорости течения или, наоборот, при росте скоростей течения траектории движения непрерывно меняются и за счет этого равенство (4) сохраняется. В первом случае течение таково, что квадратичные и линейные члены в (4) должны быть порознь равны нулю.

Наблюдения показывают, что при вытекании из емкости через трубку траектории течения не меняются при изменении расхода. Поэтому обоснованно можно принять, что для установившихся движений в ламинарном режиме справедливы уравнения, производные от (3), а именно уравнения вида:

$$\frac{\partial(\operatorname{rot}\mathbf{V})}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\mathbf{V}\times\mathbf{V}\right) = 0, \quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{V} = 0. \qquad (5)$$

В случае справедливости (5) вязкость текучей среды не влияет на вид траекторий. Но уравнения (5) существенно проще, чем уравнения (1). Их исследование как описывающих отдельный класс течений заслуживает специального изложения. Отметим, что очевидным решением (5) служит условие $\operatorname{rot}\mathbf{V} = \mathrm{const}$, в том числе: $\operatorname{rot}\mathbf{V} = 0$. Отметим еще, что течения Пуазейля и Куэтта удовлетворяют уравнениям (5).