ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2012

А. Д. М а р к о в с к и й (Москва, МГУЛ). **Предельные базисные схемы как основа классификации и оптимизации вычислительных алгоритмов.**

В работе [1] приведено определение понятий аддитивного и мультипликативного вычислительных базисов в произвольном топологическом ассоциативно-коммутативном кольце с единицей. Оно будет называться *вычислительным кольцом*, если является конечномерной линейной алгеброй над полем R действительных чисел. Доказано, счетное множество $B^+ \subset R$ есть аддитивный вычислительный базис на поле R тогда и только тогда, когда оно имеет ноль своей предельной точкой. В любом вычислительном кольце фундаментальную роль играют *аддитивные и мультипликативные предельные базисные схемы*, эффективно кодирующие различные, содержащие только «элементарные операции», вычислительные процедуры точного и приближенного разложений элементов кольца по соответствующим вычислительным базисам. *Элементарными операциями* считаются только *сложение* действительных чисел и «*сдвиг*»-умножение действительного числа на «базисный элемент» из $B^+ \subset R$. Каждую упомянутую процедуру назовем *схемным алгоритмом.*

Из всякой предельной базисной схемы H *распараллеливанием* можно получить бесконечное множество различных *предельных базисных надсхем.* Каждая надсхема кодирует бесконечное множество новых *надсхемных алгоритмов*, интерпретируемых как результат распараллееливания однозначно соответствующих им схемных алгоритмов. Классификация и методы оптимизации надсхемных и схемных алгоритмов идентичны и полностью определяются исходной предельной базисной схемой H. Множество $M(H)$ всех схемных и надсхемных алгоритмов будет называться *множеством допустимых алгоритмов предельной базисной схемы* H.

Конечное множество Б$=\{H_1, H_2, \ldots, H_m\}$, $m \in \mathbf{N}$, элементами которого являются произвольные предельные базисные схемы будет называться *схемной базой.* Бесконечное множество М(Б)$=\cup_{k=1}^{m} M(H_k)$, где $i \neq j \Rightarrow M(H_i) \cap M(H_j) = \varnothing$, называется *множеством допустимых алгоритмов схемной базы* Б, для любой вычислительной процедуры, относящейся к реальности, существуют реализующие ее алгоритмы из множества М(Б). Неопровержимо утверждение о том, что имеется бесконечное множество эффективных схемных баз. До сих пор проводились лишь начальные исследования эффективных алгоритмов, допустимых для схемных баз, содержащих предельные базисные схемы, определенные на вычислительных кольцах действительных, комплексных, дуальных и двойных чисел. Результаты исследований превзошли все ожидания. Для всех практически значимых процедур, включая операции умножения и деления, были найдены эффективные параллельные алгоритмы многократно превосходящие по быстродействию известные алгоритмы аналогичного назначения. Многочисленным и разнонаправленным новым алгоритмам принадлежит будущее. При цивилизованном подходе их необходимо незамедлительно массово внедрять в создаваемые вычислительные устройства и программы, а также в учебные программы вузов и отчасти средних школ.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим только одну мультипликативную предельную базисную схему и « симметрично распараллеливающую» ее предельную надсхему « параллельного деления», имеющую значительную практическую ценность. Предельная схема и надсхема определены на простейшем вычислительном кольце R и используют аддитивный вычислительный базис $B^+ = \{b(j) \in R \,|\, j \in \mathbf{N}\}$ и мультипликативный вычислительный базис $B^\bullet = \{-1, (1 + s\, b(j))^{-1} \,|\, s \in \{-1, 0, 1\}\,,\ j \in \mathbf{N}\,,\ b(j) \in B^+\}$.

Предельная базисная схема 1(Мультипликативных разложений действительных чисел) $\forall x \in R \forall k \in \mathbf{N} \forall s_k \in \{-1, 0, 1\} \forall j_k \in \mathbf{N} \forall b(j_k) \in B^+$:

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\begin{bmatrix} x_0 = x \\ x_k = x_{k-1} + S_k b(j_k) x_{k-1} \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_k = \operatorname{sgn} x \end{bmatrix} \Rightarrow \left[x \neq 0 \Rightarrow x = \operatorname{sgn} x \prod_{k=1}^{\infty} (1 + s_k b(j_k))^{-1} \right] \qquad (4)$$

Данная предельная базисная схема характеризуется итерационным соотношением (2) с начальным условием (1) и конечным условием (3), содержащим чужеродный для теории алгоритмов предельный переход. Именно предельный переход превращает базисные схемы в могущественное средство кодирования вычислительных алгоритмов. Схема 1 кодирует бесконечное множество схемных алгоритмов, реализующих мультипликативные разложения (4) и произвольных действительных чисел $x \neq 0$ по мультипликативному базису $B^\bullet$. Чтобы получить конкретный схемный алгоритм надо на каждом k -м шаге указать конструктивные правила определения параметров s_k и j_k и выбора базисного элемента $b(j_k)$ так, чтобы с возрастанием числа шагов k в пределе выполнилось конечное условие (3). Пять простых вариантов таких правил приведены в работе [2], хотя на сегодняшний день известны существенно лучшие варианты.

Пусть $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in R^n$ — произвольный действительный n -мерный вектор, $n \in \mathbf{N}$, для любого $q \in \{1, 2, \ldots, n\}$ x^q — произвольная координата вектора x . Следующая предельная надсхема 2 кодирует множество эффективных алгоритмов параллельного нахождения частных $\frac{x^1}{x^q}, \frac{x^2}{x^q}, \ldots, \frac{x^n}{x^q}$ от деления на любую координату x^q .

Симметричная предельная надсхема 2 (Параллельного деления вектора на любую координату). $\forall n \in \mathbf{N} \forall p \in \{1, 2, \ldots, n\} \forall x^p \in R \forall q \in \{1, 2, \ldots, n\} \forall x^q \in R \forall k \in \mathbf{N} \forall s_k \in \{-1, 0, 1\} \forall j_k \in \mathbf{N} \forall b(j_k) \in B^+$:

$$\begin{matrix}(1')\\(2')\\(3')\end{matrix}\begin{bmatrix} x_0^p = x^p \\ x_k^p = x_{k-1}^p + s_k b(j_k) x_{k-1}^p \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_k^q = \operatorname{sgn} x^q \end{bmatrix} \Rightarrow \left[x^q \neq 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x^q = \operatorname{sgn} x^q \prod\limits_{k=1}^{\infty} (1 + s_k b(j_k))^{-1} \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_k^p = \operatorname{sgn} x^q \cdot \dfrac{x^p}{x^q} \end{bmatrix} \right] \begin{matrix}(4')\\ \\(5)\end{matrix}$$

Кульминационно, что соотношения $(1') - (4')$ мощной вычислительной надсхемы 2 лишь верхними «распараллеливающими» индексами отличаются от соотношений (1)–(4) малополезной предельной базисной схемы 1. Не известная ранее предельная надсхема 2 кодирует самые быстрые неулучшаемые эффективные алгоритмы реализации различных модификаций метода Гаусса с выбором главного элемента, симплексного метода линейного программирования и т. п. Она с нетерпением ждет своего массового освоения и промышленных внедрений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марковский А. Д.* Вычислительные баз исы для основных числовых систем. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 3.

2. *Марковский А. Д.* Параллельные алгоритмы деления на основе мультипликативных разложений действительных чисел. М.: ИКИ АН СССР, 1990, 50 с.