О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 19 **М А Т Е М А Т И К И** **В ы п у с к 5**
2012

Е. К. В д о в и н а (Москва, МГУПС). **Эффект остановки спиральной волны.**

Математическая модель гомогенной кинетики свертывания крови, состоящая из двух нелинейных параболических уравнений [1], переписана в переменных χ, θ во вращающейся полярной системе координат $Q(t,x,y) = U(\chi,\theta)$, $S(t,x,y) = V(\chi,\theta)$, где $\chi = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan(y/x) - \omega\, t$, имеет вид

$$\begin{aligned} &-\omega U'_\theta - de^{-2\chi}[U''_{\theta\theta} + U''_{\chi\chi}] + K_6 U(\chi,\theta) - (1+U/u_0)\\ &\qquad\times K_1(1+K_2U/(1+K_3V))[K_4U(1+K_5U/(1+K_3V))+A] = 0,\\ &-\omega V'_\theta - de^{-2\chi}[V''_{\theta\theta} + V''_{\chi\chi}] - K_7U + K_8V = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь u_0 — концентрация предшественника тромбина, A, K_j $(j = 1,2,\ldots,8)$ — константы модели, $Q(t,x,y)$ и $S(t,x,y)$ — функции концентрации активатора процесса свертываемости и ингибитора, d — коэффициент диффузии, которая введена для того, чтобы применить метод нефиксированной конструктивной замены переменных [2].

Делаем «плавающую», нефиксированную конструктивную замену переменных [2] и производных:

$$\begin{aligned} &U(\chi,\theta)|_{\theta=\theta(\xi,\delta),\chi=\chi(\xi,\delta)} = P(\xi,\delta),\ V(\chi,\theta)|_{\theta=\theta(\xi,\delta),\chi=\chi(\xi,\delta)} = W(\xi,\delta),\\ &\left.\frac{\partial U}{\partial\chi}\right|_{\chi=\chi(\xi,\delta),\theta=\theta(\xi,\delta)} = Y(\xi,\delta),\qquad \left.\frac{\partial U}{\partial\theta}\right|_{\chi=\chi(\xi,\delta),\theta=\theta(\xi,\delta)} = T(\xi,\delta),\\ &\left.\frac{\partial V}{\partial\chi}\right|_{\chi=\chi(\xi,\delta),\theta=\theta(\xi,\delta)} = R(\xi,\delta),\qquad \left.\frac{\partial V}{\partial\theta}\right|_{\chi=\chi(\xi,\delta),\theta=\theta(\xi,\delta)} = B(\xi,\delta). \end{aligned} \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть дана система* (1) *для функций*

$$\begin{aligned} U(\chi,\theta)|_{\chi=\ln\sqrt{x^2+y^2},\theta=\arctan(y/x)-\omega t} &= Q(t,x,y),\\ V(\chi,\theta)|_{\chi=\ln\sqrt{x^2+y^2},\theta=\arctan(y/x)-\omega t} &= S(t,x,y), \end{aligned} \tag{3}$$

и справедливо предположение о виде функций $R(\xi,\delta) = \xi$, $B(\xi,\delta) = C_1P(\xi,\delta) + \xi$. *Тогда существует точное решение, где функция* $U(\chi,\theta)$ *определена в неявной, параметрической форме равенством*

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} H_0 + H_1(\xi)U(\chi,\theta) + H_2(\xi)U^2 + H_3(\xi)U^3 + H_4(\xi)U^4 = 0, \tag{4}$$

где $\xi = [-C_1U(\chi,\theta) \pm \sqrt{-C_1^2U^2 + 2e^{\Psi_1}}]/2$, $\Psi_1 = 2C_1K_8(K_7(\theta-\chi)+C_1\theta\omega)/\Psi_2$, $\Psi_2 = 2K_7^2 + 2C_1K_7\omega + C_1^2\omega^2$. *Все функции* H_j, $j = 0,1,2,3,4$, *явно вычислены. Функция* $V(\chi,\theta)$ *определяется формулой* $V(\chi,\theta) = \xi\omega/K_8 + U(\chi,\theta)(K_7+C_1\omega)/K_8$, $C_1 = \mathrm{const}$.

Комментарии к доказательству. Формулы пересчета производных старых переменных χ , θ по новым ξ, δ имеют вид

$$\frac{\partial\delta}{\partial\theta} = \frac{\partial\chi}{\partial\xi}\Big/ J_1, \quad \frac{\partial\delta}{\partial\chi} = -\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\Big/ J_1, \quad \frac{\partial\xi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\chi}{\partial\delta}\Big/ J_1, \quad \frac{\partial\xi}{\partial\chi} = \frac{\partial\theta}{\partial\delta}\Big/ J_1,$$

где $J_1 = \det J$. После преобразований, аналогичных [2], получим

$$\left(\frac{\partial W}{\partial\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\delta} - \frac{\partial W}{\partial\delta}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right) = R(\xi,\delta)J_1, \quad \left(-\frac{\partial W}{\partial\xi}\frac{\partial\chi}{\partial\delta} + \frac{\partial W}{\partial\delta}\frac{\partial\chi}{\partial\xi}\right) = BJ_1. \tag{5}$$

Аналогичные уравнения имеем для функций $Y(\xi,\delta), T(\xi,\delta)$. Уравнения системы (1) принимают вид

$$\begin{aligned} &de^{-2\chi(\xi,\delta)}\left(-\frac{\partial T}{\partial\delta}\frac{\partial\chi}{\partial\xi} + \frac{\partial T}{\partial\xi}\frac{\partial\chi}{\partial\delta} + \frac{\partial Y}{\partial\delta}\frac{\partial\theta}{\partial\xi} - \frac{\partial Y}{\partial\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\delta}\right)\Big/ J_1 - \omega T + K_6 P \\ &\quad -K_1(1 + K_2P/(1+K_3W))[K_4P(1+K_5P/(1+K_3W)) + A](1 - P/u_0) = 0, \\ &de^{-2\chi(\xi,\delta)}\left(-\frac{\partial B}{\partial\delta}\frac{\partial\chi}{\partial\xi} + \frac{\partial B}{\partial\xi}\frac{\partial\chi}{\partial\delta} + \frac{\partial R}{\partial\delta}\frac{\partial\theta}{\partial\xi} - \frac{\partial R}{\partial\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\delta}\right)\Big/ J_1 \\ &\quad -\omega B(\xi,\delta) - K_7P(\xi,\delta) + K_8W(\xi,\delta) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Далее с необходимостью системы уравнения дополняются двумя условиями равенства смешанных производных в переменных ξ, δ :

$$-\frac{\partial\chi}{\partial\delta}\frac{\partial R}{\partial\xi} + \frac{\partial\chi}{\partial\xi}\frac{\partial R}{\partial\delta} - \frac{\partial\theta}{\partial\delta}\frac{\partial B}{\partial\xi} + \tfrac{\partial\theta}{\partial\xi}\frac{\partial B}{\partial\delta} = 0. \tag{7}$$

Аналогичное уравнение имеет место для функций $Y(\xi,\delta), T(\xi,\delta)$. Из четырех уравнений: (5), второго уравнения (6), (7) строим вторую СФЛАУ $A_2X = b_2$.

Теорема 2. *Пусть дана система уравнений первого порядка с частными производными*: (5), *второе уравнение* (6), (7), *эквивалентная второму уравнению с частными производными второго порядка* (1) . *Тогда система* СФЛАУ $A_2X = b_2$ *имеет единственное решение*

$$\frac{\partial\chi}{\partial\xi} = g_1(\xi,\delta), \quad \frac{\partial\chi}{\partial\delta} = g_2(\xi,\delta), \quad \frac{\partial\theta}{\partial\xi} = g_3(\xi,\delta), \quad \frac{\partial\theta}{\partial\delta} = g_4(\xi,\delta).$$

Это новая система уравнений с частными производными первого порядка с формально «известной» правой частью, где

$$\begin{aligned} g_1(\xi,\delta) &\stackrel{\text{def}}{=} [-2K_7\xi - C_1K_3C_1\omega)P + C_1^2(\xi\omega - K_7P)P'_\xi]/(C_1K_8Z_3), \\ g_2(\xi,\delta) &\stackrel{\text{def}}{=} C_1(\xi\omega - K_7P)P'_\delta/(K_8Z_3), \\ g_3(\xi,\delta) &\stackrel{\text{def}}{=} [2\xi(K_7 + C_1\omega) + C_1^2\omega P + C_1(2K_7\xi + C_1\xi\omega + K_7C_1P + C_1^2\omega P)P'_\xi]/(C_1K_8Z_3), \\ g_4(\xi,\delta) &\stackrel{\text{def}}{=} [\xi(2K_7 + C_1\omega) + C_1(K_7 + C_1\omega)P]P'_\delta]/(K_8Z_3), \quad Z_3 = 2\xi^2 + 2C_1\xi P + C_1^2P^2. \end{aligned}$$

Комментарии к доказательству. Интегралы системы имеют вид

$$\begin{aligned} \theta &= C_\theta - K_7(C_1K_8)^{-1}\arctan[1 + C_1P/\xi] + (K_7 + C_1\omega)(2C_1K_8)^{-1}\ln[Z_3], \\ \chi &= C_r + (K_7 + C_1\omega)(C_1K_8)^{-1}\arctan[1 + C_1P/\xi] - K_7(2C_1K_8)^{-1}\ln[Z_3]. \end{aligned}$$

Вычитая интегралы и полагая, для простоты, равными нулю константы сдвига C_θ , C_r , возвращаемся к исходным переменным θ χ . Тогда можно получить выражение (4) для ξ , приведенное в теореме 1.

Из соотношений, аналогичных (5), получим выражения для

$$\begin{aligned} Y(\xi,\delta) &= K_8[2(K_7 + C_1\omega) + C_1^2\omega P'_\xi]/\Psi_2, \\ T(\xi,\delta) &= K_8[2K_7\xi + 2C_1K_7P + C_1^2\omega PP'_\xi]/\Psi_2. \end{aligned}$$

Вычислим производные и подставим первое уравнение (6), тогда получим (4). Таким образом, все введенные в (2)–(3) функции определены однозначно. Далее зададим константы из [1]. Общая, связная структура поверхности $Z = 0$ (4) в данном случае разваливается на две составляющие. Гиперплоскость резко изгибается под почти прямым углом. Верхняя ее часть соответствует импульсу большой амплитуды. График импульса концентрации ингибитора имеет меньшую амплитуду. Геометрию импульса можно вычислить в любой точке области определения. Из неравенства неотрицательности подкоренного выражения для ξ в (4) следует оценка характерного размера области (тромба).

В данном случае существует возможность из построенного решения перейти к решению при нулевом значении угловой скорости, т. е. описан эффект «остановки» структуры и переход в биологической жидкости к тромбу.

Выражаем благодарность В. П. Маслову, А. И. Лобанову, А. С. Братусю за полезные замечания и обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Атауллаханов Ф. И.*, *Зарницина В. И.*, *Кондратович А. Ю.*, *Лобанов Е. С.*, *Сарбаш В. И.* Особый класс автоволн — автоволны с остановкой — определяет пространственную динамику свертывания крови. — Успехи физических наук, 2002, т. 172, № 6, с. 671–690.
2. *Волосова А. К.*, *Волосов К. А.* Construction solutions of PDE in Parametric Form. — International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2009, Article ID, 319268, 17 p.
http://www.hindawi.com/journals/ijmms/2009/319269.html.doi:10.1155./2009/319269.