

Г. М. Давиденко (Чита, ЗабГГПУ). **О решении краевых задач на трехзонной плоскости с завесой и идеальным контактом сред.**

Рассмотрим плоскость x, y , состоящую из трех однородных зон $D_1(x < 0)$, $D_2(0 < x < l)$, $D_3(x > l)$ с различной проницаемостью k_i в D_i , когда зоны D_1 и D_2 разделены слабо проницаемой завесой (экраном) $x = 0$ с параметром B , а контакт $x = l$ зон D_2 и D_3 идеальный. Пусть на плоскости x, y задана гармоническая функция $F(x, y)$, имеющая особые точки (источники, стоки и т.п.) при $x \leq 0$. Для потенциалов u_i в D_i задача с заданными особыми точками функции $F(x, y)$ имеет вид [1, 2]:

$$\Delta u_i = 0, \quad (x, y) \in D_i, \quad (1)$$

$$x = 0: \quad u_2 - u_1 = Bk_1 \partial_x u_i, \quad k_2 \partial_x u_2 = k_1 \partial_x u_1, \quad (2)$$

$$x = l: \quad u_2 = u_3, \quad k_2 \partial_x u_2 = k_3 \partial_x u_3, \quad (3)$$

где $\partial_x^n = \partial^n / \partial x^n$, при этом в окрестности особых точек выполняется условие

$$u_1 \sim F(x, y). \quad (4)$$

Задачу (1)–(4) решаем методом свертывания разложений Фурье [2]. Полагая, что функция $F(0, y)$ разлагается в интеграл Фурье, представим функцию $F(x, y)$ в полуплоскости $x \geq 0$, где она не имеет особых точек, в виде

$$F(x, y) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} g d\lambda, \quad x \geq 0, \quad (5)$$

где $g = f_1 \sin \lambda y + f_2 \cos \lambda y$, f_i — коэффициенты Фурье функции $F(0, y)$. Отсюда, применяя метод Фурье, решение задачи (1)–(4) получим в виде $u_1 = F(x, y) + \int_0^\infty a e^{\lambda x} g d\lambda$ для $x \leq 0$, $u_2 = \int_0^\infty (b \operatorname{sh} \lambda x + d \operatorname{ch} \lambda x) g d\lambda$ для $0 \leq x \leq l$, $u_3 = \int_0^\infty p e^{-\lambda(x-l)} g d\lambda$ для $x \geq l$, где

$$\begin{aligned} a &= 1 - \frac{2k_2(k_3 \operatorname{sh} \lambda l + k_2 \operatorname{ch} \lambda l)}{2k_1(k_3 \operatorname{ch} \lambda l + k_2 \operatorname{sh} \lambda l)}, \quad b = -\frac{2k_1(k_3 \operatorname{ch} \lambda l + k_2 \operatorname{sh} \lambda l)}{2k_1(k_3 \operatorname{sh} \lambda l + k_2 \operatorname{ch} \lambda l)}, \\ d &= \frac{2k_1(k_3 \operatorname{sh} \lambda l + k_2 \operatorname{ch} \lambda l)}{r}, \quad p = \frac{2k_1 k_2}{r}, \\ r &= k_2(1 + Bk_1 \lambda)(k_3 \operatorname{ch} \lambda l + k_2 \operatorname{sh} \lambda l) + k_1(k_3 \operatorname{sh} \lambda l + k_2 \operatorname{ch} \lambda l), \\ \frac{1}{r} &= \frac{2e^{-\lambda l}}{Bk_1 k_2 (\lambda + \gamma)(k_2 + k_3)(1 - q)} = \frac{2}{Bk_1 k_2 (k_2 + k_3)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\lambda n l - \lambda l} \mu^n \frac{(\lambda + \nu)^n}{(\lambda + \gamma)^{n+1}}, \\ q &= e^{-2\lambda l} \mu \frac{\lambda + \nu}{\lambda + \gamma}, \quad \mu = \frac{k_2 - k_3}{k_3 + k_2}, \quad \nu = \frac{k_2 - k_1}{Bk_1 k_2}, \quad \gamma = \frac{k_1 + k_2}{Bk_1 k_2}, \end{aligned}$$

при этом учитываем, что знаменатель q геометрической прогрессии $|q| < 1$ при $0 \leq \lambda < \infty$. Из разложения функции $F(x, y)$ (5) следует формула, указанная в работе [3]:

$$\frac{(-1)^k}{n!} \int_0^\infty e^{(\nu - \gamma)t} t^n \partial_t^k [e^{-\nu t} F(x + t, y)] dt = \int_0^\infty \frac{(\lambda + \nu)^k}{(\lambda + \gamma)^{n+1}} e^{-\lambda x} g d\lambda.$$

Отсюда решение u_i задачи (1)–(4) примет вид без разложений Фурье

$$\begin{aligned} u_1 &= F(x, y) + F(-x, y) - (\nu + \gamma) \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \Phi_{n,n}(-x + 2nl, y) \\ &\quad + (\nu + \gamma) \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{n+1} \Phi_{n,n}(-x + 2l + 2nl, y), \\ u_2 &= (\gamma - \nu) \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \Phi_{n,n}(x + 2nl, y) \\ &\quad + (\gamma - \nu) \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{n+1} \Phi_{n,n}(-x + 2l + 2nl, y), \\ u_3 &= (\gamma - \nu)(1 - \mu) \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \Phi_{n,n}(x + 2nl, y), \end{aligned}$$

где

$$\Phi_{k,n}(x, y) = \frac{(-1)^k}{n!} \int_0^{\infty} e^{(\nu-\gamma)t} t^n \partial_t^k [e^{-\nu t} F(x+t, y)] dt.$$

Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ, № 1.3985.2011.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977, 735 с.
2. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве. — Дифф. уравнения, 2009, т 45, № 8, с. 1204–1208.
3. Холодовский С. Е. О решении краевых задач в полупространстве, ограниченном многослойной пленкой. — Ученые записки ЗабГГПУ. Сер. физ., матем., техн., техн.-пол., 2001, № 3 (38), с. 160–164.