О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й   И   П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 19   М А Т Е М А Т И К И   В ы п у с к 5
2012

В. В. К и с е л е в (Москва, ФГОУ ВПО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»). **Решение задачи определения оптимальной политики в области рекламной деятельности.**

Ниже приводится решение задачи, сформулированной в книге Интрилигатора «Математические методы оптимизации и экономическая теория»: найти оптимальную политику в области рекламной деятельности, которая стимулирует объем продаж данного продукта за некоторый период времени при следующих условиях: скорость изменения объема продаж уменьшается пропорционально объему продаж и увеличивается пропорционально уровню рекламной деятельности в той части рынка, которая еще этим продуктом не насыщена. Задача имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} S(t)\,dt \to \max_{\{A(t)\}}, \quad \dot{S} = -aS + bA(1 - S/M), \quad S(t_0) = S_0, \quad 0 \leqslant A(t) \leqslant \overline{A},$$

где S — объем продаж, A — уровень рекламной деятельности, M — емкость рынка, $t_0, t_1, a, b, S_0, \overline{A}$ — заданные положительные параметры.

Пусть $t_1 - t_0 = T$, $x_1 = S$, $A(t) = u$, $\overline{A} = U$, тогда сформулированную выше задачу можно переписать так:

$$x_0(t) = -\int_0^T x_1\,dt,\ \dot{x}_0 = -x_1 = f_0,\ x_0(0) = 0,$$
$$\dot{x}_1 = -ax_1 + bu(1 - x_1/M),\ x_1(0) = x_1^0,\ 0 \leqslant u \leqslant U.$$

Запишем систему сопряженных уравнений:

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = -\varphi_0\frac{\partial f_0}{\partial x_0} - \varphi_1\frac{\partial f_1}{\partial x_0} = -\varphi_0 \cdot 0 - \varphi_1 \cdot 0 = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = -\varphi_0\frac{\partial f_0}{\partial x_1} - \varphi_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \varphi_0 - \varphi_1(-a - bu/M) = \varphi_0 + \varphi_1 B, \qquad (2)$$

где $B = a + bu/M$ положительно по условию задачи.

Из первого уравнения следует $\varphi_0(t) = C_0$; используя формулу граничного условия, можно записать $\varphi_0(T) = -1 = C_0 = \varphi_0(t)$.

Получим условия для нахождения оптимального управления: $\max_{0\leqslant u\leqslant U}\{\varphi, f\} = \max_{0\leqslant u\leqslant U}\{f_0\varphi_0 + f_1\varphi_1\} = \max_{0\leqslant u\leqslant U}\{-1(-x_1) + (-ax_1 + bu(1 - x_1/M))\varphi_1\} = x_1 - ax_1\varphi_1 + \max_{0\leqslant u\leqslant U}\{bu(1 - x_1/M)\varphi_1\}$; поскольку по условию задачи $b > 0$, $x_1/M \leqslant 1$, то

$$u^* = \begin{cases} U & \text{при} \quad \varphi_1 > 0, \\ 0 & \text{при} \quad \varphi_1 \leqslant 0. \end{cases}$$

Подставим оптимальное управление u^* в выражение, определяющее B:

$$B = \begin{cases} a & \text{при} \quad \varphi_1 \leqslant 0, \\ a + bU/M & \text{при} \quad \varphi_1 > 0. \end{cases}$$

Заметим, что $d(B\varphi_1 - 1) = B\,d\varphi_1$. Теперь уравнение (2) можно переписать в виде $d(B\varphi_1 - 1)/(B\varphi_1 - 1) = B\,dt$, откуда $\ln|B\varphi_1 - 1| = Bt - c$, это эквивалентно

$$B\varphi_1 - 1 = e^{Bt-c} \quad \text{при} \quad B\varphi_1 - 1 \geqslant 0, \tag{3}$$

$$-(B\varphi_1 - 1) = e^{Bt-c} \quad \text{при} \quad B\varphi_1 - 1 < 0, \tag{4}$$

Из граничного условия следует $\varphi_1(T) = 0$, (3) дает $\varphi_1(T) = (e^{BT-c} + 1)/B \neq 0$. Из (4) следует $\varphi_1(T) = (-e^{BT-c} + 1)/B = 0$. Так как $\varphi_1(T) = 0$, то $BT = c$, т.е. $\varphi_1(t) = (1 - e^{B(t-T)})/B$. Поскольку $\varphi_1 > 0$ при $0 \leqslant t < T$ и $\varphi = 0$ при $t = T$, оптимальное управление имеет вид: $u^* = U$ при $0 \leqslant t < T$, $u^* = 0$ при $t = T$.